

# 超伝導薄膜の第三高調波誘導電圧の数値計算

田中 賢一

2003 年 2 月 25 日

電子情報工学科

# 目次

第1章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	超伝導体の実用化	2
1.3	誘導法による第三高調波測定	2
1.4	馬渡らの理論	4
1.5	研究背景	5
1.6	本研究の目的	6
第2章	有限要素法による解析	7
2.1	モデル	7
2.2	測定条件	7
2.3	第三高調波 $V_3$ の導出	9
2.4	数値計算	10
2.4.1	馬渡らによる理論との比較	10
2.4.2	不均一な $J_c$ の空間分布による影響	11
第3章	実験結果および検討	13
3.1	結果と検討	13
3.1.1	馬渡らによる理論との比較	13
3.1.2	不均一な $J_c$ の空間分布による影響	24
第4章	結論と今後の課題	26
4.1	結果と検討	26
4.1.1	結果	26
4.1.2	検討	27
	参考文献	29

## 図目次

1.1	有限要素法のモデル図と $V_3$ の立ち上がり . . . . .	3
1.2	$I_0 < I_{c0}$ で生じている $V_3$ . . . . .	4
2.1	作成したモデル . . . . .	8
2.2	$V_3$ - $I_0$ 曲線 (Mawatari <i>et al.</i> , 2002) . . . . .	8
2.3	$I_0 < I_{c0}$ ( $I_0 = 0.5I_{c0}$ ) の磁束と電圧 . . . . .	9
2.4	$I_0 > I_{c0}$ ( $I_0 = 1.5I_{c0}$ ) の磁束と電圧 . . . . .	10
2.5	$I_0 > I_{c0}$ における $\phi - r$ 曲線 . . . . .	11
2.6	$J_c$ がリング状に劣化した領域をもつ薄膜 . . . . .	12
3.1	磁束密度の分布 . . . . .	13
3.2	解析結果の $V_3$ - $I_0$ 曲線 . . . . .	16
3.3	解析結果を馬渡らの手法で規格化した $V_3$ - $I_0$ 曲線 . . . . .	17
3.4	実験結果を馬渡らの手法で規格化した $V_3$ - $I_0$ 曲線 . . . . .	18
3.5	解析結果を我々の手法で規格化した $V_3$ - $I_0$ 曲線 . . . . .	19
3.6	馬渡らの実験結果を我々の手法で規格化した $V_3$ - $I_0$ 曲線 1 . . .	20
3.7	馬渡らの実験結果を我々の手法で規格化した $V_3$ - $I_0$ 曲線 2 . . .	21
3.8	解析結果の立ち上がりにおける $V_3$ の傾き . . . . .	22
3.9	$I_{c0}$ と $J_c$ の比例関係 . . . . .	23
3.10	薄膜内に欠陥がある場合の $V_3$ - $I_0$ 曲線 . . . . .	25

# 第 1 章 序論

## 1.1 はじめに

オランダの物理学者 H. Kamerlingh-Onnes は、1908 年ヘリウムガスの液化に成功し、1913 年にはこの発見などによりノーベル物理学賞を受賞している。また、1911 年水銀の電気抵抗が 4.2 K で突然ゼロになる現象、すなわち超伝導転移現象を確認した。以来、世界中の物理学者がその実験的研究と理論的研究を行ってきた。Onnes の発見後およそ 20 年間、超伝導状態は単純にゼロ電気抵抗または無限大電気伝導度を持つ金属の状態として理解されていた。ところが、1933 年ドイツの研究者 W. Meissner と R. Ochsenfeld は、超伝導体が磁界を排除していること、すなわち完全反磁性を発見した。1961 年には、1950 年に理論物理学者 F. London によって予想された磁束の量子化をアメリカと西ドイツの大学が実験的に証明した。また彼らは、超伝導体の内部では電子が 2 個ずつ対になっている、すなわち 1956 年アメリカの L. N. Cooper によって提案されたクーパー対の存在もこのとき同時に証明している。これら、電気抵抗ゼロ・完全反磁性・量子化磁束という、3 つの超伝導体基本性質を説明する微視的理論が 1957 年アメリカの J. Bardeen、L. N. Cooper、J. R. Schrieffer によって公表された。これが有名な BCS 理論である。

同じく 1950 年代のソ連では、理論物理学者 V. L. Ginzburg と L. D. Landau によって導かれた理論を用い、物理学者 A. A. Abrikosov が第二種超伝導体の磁化と磁界の関係を予想しており、この予想は 1966 年旧西ドイツの研究者 U. Essmann と H. Träuble によって証明された。超伝導体はその性質により第一種超伝導体と第二種超伝導体に分類される。第一種超伝導体は臨界磁界  $B_c$  を境にして、完全反磁性を示す超伝導状態から常伝導状態へ移るといった単純な特性を有する。これに対し、第二種超伝導体は、下部臨界磁界  $B_{c1}$  と上部臨界磁界  $B_{c2}$  を持ち、 $B_{c1}$  を超えると量子化された磁束が

超伝導体内部に侵入してくる。このような状態を混合状態と言う。混合状態は磁束が侵入しているからといって超伝導状態が破壊されているわけではない。この混合状態は磁界が  $B_{c2}$  に達するまで存在し、それ以上で常伝導状態となる。第二種超伝導体の  $B_{c2}$  は、第一種超伝導体の  $B_c$  に比べ格段に大きいため、実用超伝導体では第二種超伝導体を混合状態で使用する機会が多い。

## 1.2 超伝導体の実用化

近年、超伝導体を用いた装置の実用化へ向けた技術的進歩はめざましい。例えば医療用の磁気共鳴診断装置 (MRI)、エネルギー技術では超伝導コイルを用いたエネルギー貯蔵 (SMES) などは、すでに商用化されている。それ以外にも現段階で実用化に成功しているものもあり、商用化に向けてめまぐるしく進化している。しかし、現時点でこれらはほとんど極低温下でしか動作せず、非常に高価な液体ヘリウムを使った冷却装置を必要とする。応用の期待が大きい高温超伝導体は、抵抗なしに流しうる最大の電流密度である臨界電流密度  $J_c$  が低く、実用レベルには達していない。しかしこの  $J_c$  は冶金学的な処理によって変えられる量であり、 $J_c$  を決定する主因は量子化磁束のピンニングの強さや結晶界面などでの弱結合特性である。現在、ピン力の向上や弱結合となる結晶界面の排除を目指した研究は世界中で行われているが、ピンや弱結合の性質上、広い領域を持つ超伝導体においてこれを一定の値に定めることは難しく、また作成段階でその分布を操作することも困難である。そのため、今後超伝導体を使用した商品を開発するに当たり、超伝導体内の欠陥や  $J_c$  の分布を測定する非破壊・非接触の方法が必要になる。そこで、測定する超伝導体に交流磁界を加えたときに反射する電圧の第三高調波  $V_3$  を利用した方法が考え出された。後で示すが、 $V_3$  は正確には第三高調波の振幅である。しかし、この論文内では断りのない限り  $V_3$  は第三高調波のことを指す。

## 1.3 誘導法による第三高調波測定

適当な大きさの交流磁界が、十分に広い超伝導薄膜表面の局所的な部分へ垂直に印加されたとき、 $V_3$  が誘導されることが以前から知られていた。Claassen ら<sup>1)</sup> は、局所的な  $J_c$  の測定に  $V_3$  の誘導法を提案した。この方法で

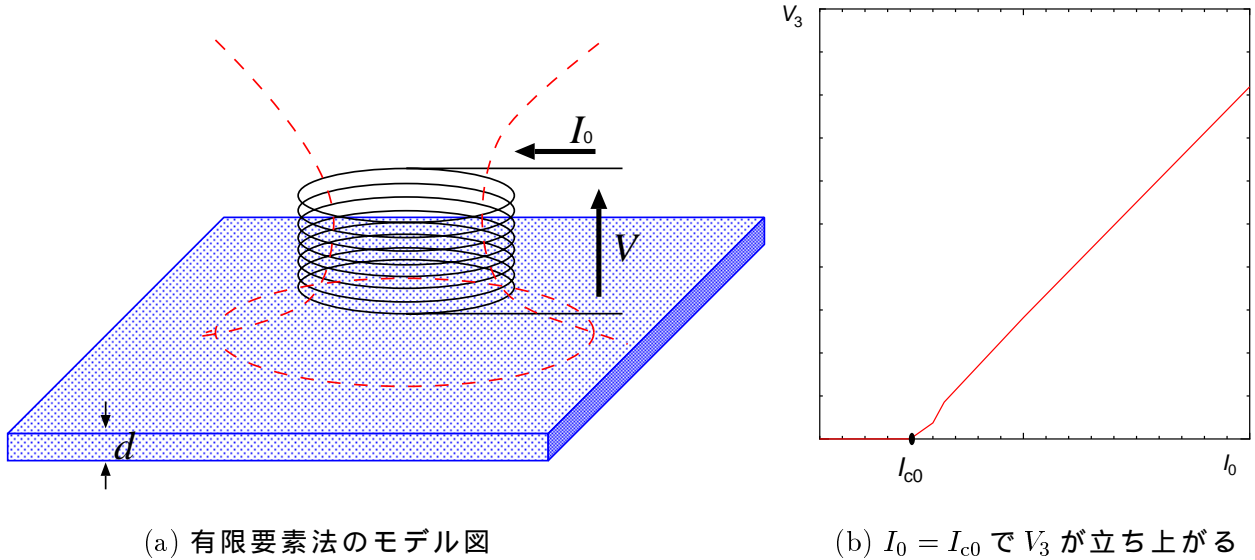


図 1.1. 有限要素法のモデル図と  $V_3$  の立ち上がり

は、図 1.1(a) のように超伝導薄膜の表面近傍に置かれた小さなコイル (典型的なコイルの直径は数 mm である) に流した正弦波電流  $I_0 \cos \omega t$  によって交流磁界を発生させる。すると、 $I_0$  が小さい場合は  $V_3$  は出現しないが、ある閾値  $I_{c0}$  を越えると図 1.1(b) のように、コイルに  $V_3$  が誘導される。

このときコイルに誘導される磁束は  $\Phi = \Phi_d + \Phi_s$  と表される。 $\Phi_d$  はコイルに印加した交流電流  $I_0 \cos \omega t$  から発生した磁束であり、

$$\Phi_d = L_c I_0 \cos \omega t \tag{1.1}$$

と表せる。このときの  $L_c$  はコイルの自己インダクタンスである。これに対し、 $\Phi_s$  は薄膜に流れる表面電流から発生した磁束である。 $V_3$  とは、この  $\Phi$  によって発生する電圧  $V(t)$  をフーリエ級数展開したときの三次成分である。後に示すが、級数展開することにより  $V_3$  の変化に寄与するのは  $\Phi_s$  のみとなる。つまり、第三高調波はコイルによって引加された交流磁界の影響で薄膜表面に流れる表面電流の変化、言い方を变え、交流磁界の磁束が試料に出入りすることにより生じる誘導電圧の三次成分とすることができる。これまで、 $V_3$  は  $I_0 > I_{c0}$  の条件で発生すると書いてきたが、実際は図 1.2 のように  $I_0 < I_{c0}$  でも生じている。それは、 $I_{c0}$  以前にも磁束が薄膜内に進入しているからである。しかし、そのオーダーは  $10^{-7}$  程度であり、 $I_{c0}$  を越えたときのオーダー  $10^{-4}$  程度とは大きく開きがある。そこで、この論文内では  $I_0 > I_{c0}$  で発生する  $V_3$  のみを第三高調波と定義し、 $I_{c0}$  で突然  $V_3$  のオーダーが増加することを  $V_3$  の立ち上がりと表記する。

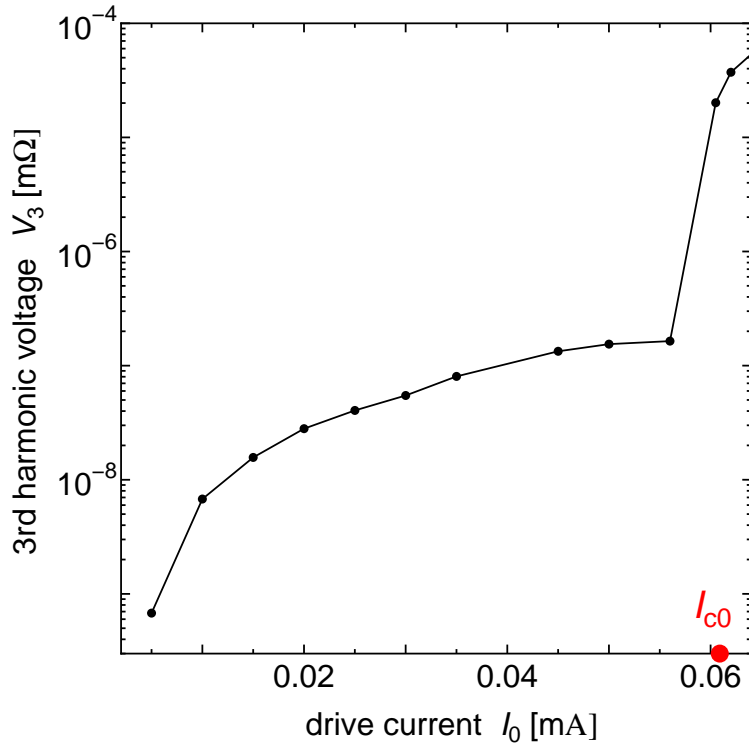


図 1.2.  $I_0 < I_{c0}$  で生じている  $V_3$

このとき、局所的な  $J_c$  は  $V_3$  が現れ始める  $I_{c0}$  に比例していることが経験的に知られている。現在この方法は一般的に、表面近傍にあるコイルを走査させ、広い領域を持つ超伝導薄膜の  $J_c$  分布を測定するのに使われている。この方法は超伝導薄膜以外に超伝導膜や超伝導 coated 線材においても有効である。磁界の強さと高調波電圧の関係は、原理的には臨界状態モデルから理論的に得ることができる。

#### 1.4 馬渡らの理論

馬渡ら<sup>2)</sup>による理論的分析によると、 $\Phi_s$  は

$$\Phi_s = \frac{2\pi N}{S} \int_{R_1}^{R_2} \rho d\rho \int_{Z_1}^{Z_2} dz A_s \quad (1.2)$$

と表される。このとき  $N$  はコイルの巻き数、 $S$  はコイルの半径を  $R_1 < r < R_2$ 、長さ方向の位置を  $Z_1 < z < Z_2$  としたときの横断面積であり、 $S = (R_2 - R_1)(Z_2 - Z_1)$  と示せる。 $A_s$  は薄膜に流れる表面電流から発生したベクトルポテンシャルである。また、コイルの形状で与えられる関数  $F_1(r)$  を

$$F_1(r) = \frac{N}{4\pi S} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{r' \cos \theta}{R} dr' d\theta dz \quad (1.3)$$

$$R = (z^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2} \quad (1.4)$$

としたとき、抵抗が無視できるコイルに誘導される電圧  $V(t)$  は  $V = d\Phi/dt$  より、

$$V(t) = \omega L_c I_0 \sin \omega t - 2\pi \mu_0 \int_0^\infty d\rho \rho F_1(\rho) \frac{\partial K_s(\rho, t)}{\partial t} \quad (1.5)$$

とできる。ここでの  $K_s$  は表面電流である。上式の第一項は  $\Phi_d$  の成分であり、第二項は  $\Phi_s$  の成分になっている。  $V(t)$  は以下のようにフーリエ級数展開できる。

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega t + \theta_n) \quad (1.6)$$

(1.6) 式における  $n = 3$  の項が  $V_3$  である。前に述べたように、  $\Phi_d$  の成分は  $V_3$  の変化に寄与しない。それは、フーリエ級数展開したとき  $\sin$  関数が一定の値を示すからである。

また、  $V_3$  の発生について  $I_0$  が閾値  $I_{c0}$  よりも小さいとき ( $I_0 < I_{c0}$ ) に  $V_3$  はほぼゼロとなるが、  $I_0 > I_{c0}$  のとき、磁界が薄膜表面に平行な領域でのみ磁界が薄膜を突き抜け、その結果  $V_3$  が発生するとしている。このときの  $V_3$  は  $I_0$  に対し

$$V_3 \exp(-i\theta_3) \propto \omega I_{c0} G(I_0/I_{c0})^{3/2} \quad (1.7)$$

という関係を持っており、立ち上がりにおける  $V_3$  は  $I_0$  に対して  $3/2$  乗に比例する傾きを持つとしている。なお、ここでの  $G(x)$  はコイルの形状で決定されるスケール関数である。ただし馬渡らの理論式は、磁束が薄膜に入り込む薄膜表面付近において、ほとんどの磁界は薄膜表面に対し平行であるという仮定の下でのみ与えられる。

## 1.5 研究背景

実際の場合において、磁界は薄膜表面に対して完全に平行ではない。とりわけ、コイルの中央付近で磁界が強い領域では平行になっていない。し



たがって、馬渡らの計算の正当性は明確なものと言えず、正確な条件下での解析が必要である。しかしその理論的解析は非常に困難である。また、馬渡らは自ら実験を行い理論との比較を行っている。その結果、 $V_3$ の立ち上がりにおける傾きや、高磁界側での $I_{c0}$ 、 $V_3$ 曲線で理論と一致しない点があった。この理由について馬渡らは実験試料の不均一な $J_c$ 分布を上げている。 $J_c$ の空間分布を考慮した計算をすることは不可能であるため、その検討の正当性については明らかでないが、そのような外的な影響を受けない有限要素法を用いた解析により、馬渡らの理論と比較することは有効であると思われる。

さらに、あらかじめ $J_c$ を意図的に分布させた試料のモデルを作成し、それが $V_3$ へ与える影響を有限要素法によって数値計算することができれば、有限要素法が、 $V_3$ の測定を行うことにより超伝導体内の局所的な $J_c$ 分布や欠陥を評価する上で有効であると言うことができ、超伝導体の欠陥測定方法としての適正を示すことができる。

## 1.6 本研究の目的

この論文では、超伝導薄膜における臨界電流密度 $J_c$ と第三高調波電圧 $V_3$ に関する馬渡らの理論との比較を目的とし、有限要素法を用いた様々な数値的解析を行っている。さらに、有限要素法の超伝導体内の欠陥評価測定方法としての適用性を調べるため、超伝導薄膜に局所的に際だって劣化した領域を与えたときに、その領域が $V_3$ 与える影響も評価した。

## 第 2 章 有限要素法による解析

### 2.1 モデル

数値計算には日本総合研究所の JMAG studio version 7 を使用した。馬渡らによる実験結果と比較できるように、実験と同じ状況を想定しモデルを作成した。(図 2.1 参照)

内径 2 mm 外形 5 mm 高さ 1 mm のコイル ( $R_1 = 1$  mm,  $R_2 = 2.5$  mm,  $Z_1 = 0.2$  mm,  $Z_2 = 1.2$  mm) を、厚さ  $0.6 \mu\text{m}$  の十分に広い領域を持つ超伝導薄膜表面に対しコイルの軸が垂直になるように高さ 0.2 mm の位置に取り付けた。コイルの巻き数は 400 回、線径は  $3.75 \mu\text{m}$  である。交流磁界は、コイルに流す正弦波電流  $I_0 \cos \omega t$  によって超伝導薄膜に対し垂直に印加する(図 1.1(a) 参照)。また、超伝導薄膜内の磁束密度の分布は、臨界状態モデルを仮定して計算する。軸に関する対称性より、全体の領域の  $1/360$  である 1 度の方位角の領域内部について電流の分布と磁界を計算した。この領域は、半径方向に対して要素幅が 0.1 mm になるよう 50 の面に分割、軸方向に対しては空気とコイル部分の要素高さが 0.1 mm になるように分割しており、薄膜部分の要素高さは  $0.1 \mu\text{m}$  になるよう 6 つの層に分割している。

### 2.2 測定条件

この数値解析では、直流外部磁界がない状態での Bean モデルを用い、超伝導薄膜の  $J_c$  を任意の値に決定して実行している。実験では薄膜の  $J_c$  を外部からの直流磁界によって調整しているが、一様な直流磁界の重ね合わせは、後に示すような  $V_3$  に関係する薄膜内の電流分布に影響を及ぼさないため、特に考慮する必要はない。ただし、数値解析する際に定めた  $J_c$  の値は、馬渡らの実験で直流外部磁場によって定まる薄膜の  $J_c$  におおよそ対応するように決定した。参考として、図 2.2 に馬渡らの実験により得られた  $V_3$ - $I_0$  曲線を示す。

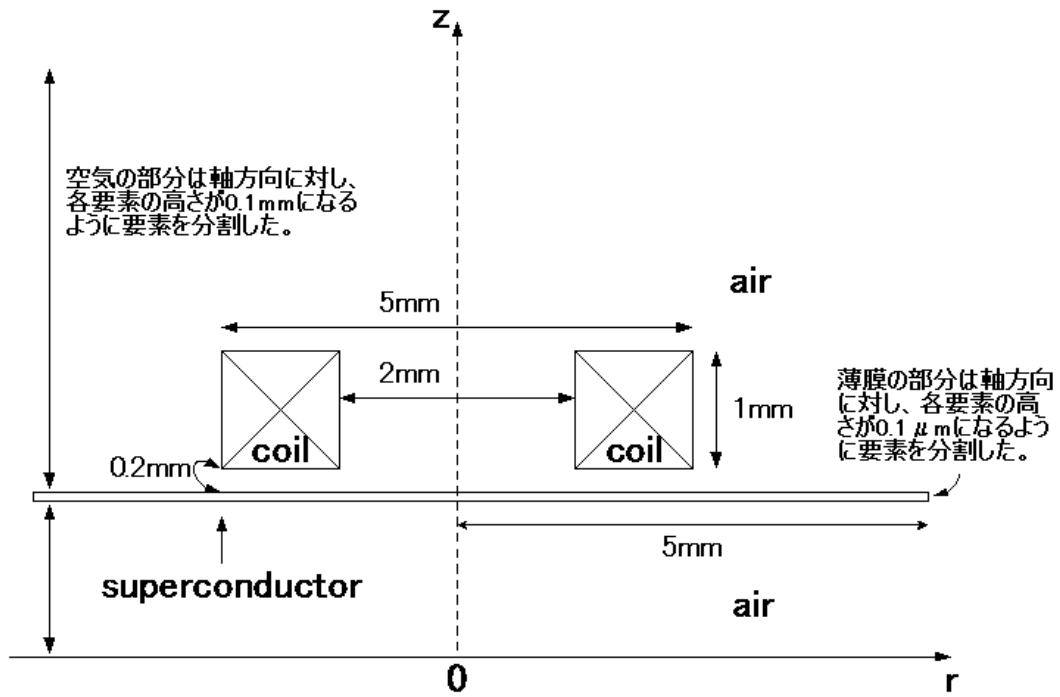


図 2.1. 作成したモデル

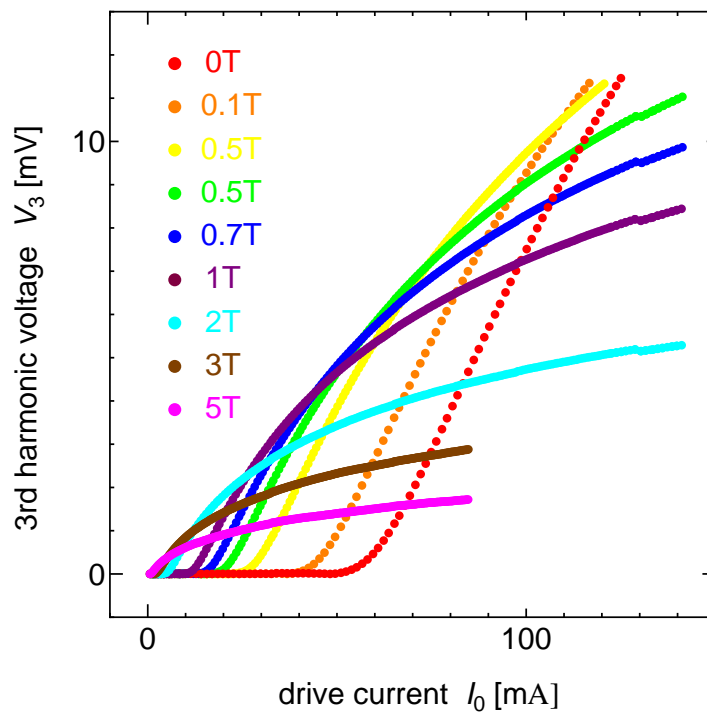


図 2.2.  $V_3$ - $I_0$  曲線 (Mawatari *et al.*, 2002)

また、有限要素法の問題として、電流が超伝導体表面に侵入する深さである表皮厚さ  $\delta$  が要素の深さを越えないように考慮する必要がある。そのため、以下に示す式を用いて周波数を決定した。

$$d < \delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu_0\omega}} = \sqrt{\frac{1}{\sigma\mu_0\pi f}} \quad \therefore f < \frac{1}{\pi\sigma\mu_0 d^2} \quad (2.1)$$

ここで、 $f = \omega/2\pi$  は周波数、 $\sigma$  は薄膜の電気電導率である。

### 2.3 第三高調波 $V_3$ の導出

JMAG の解析結果には磁束密度、電流、磁化など 8 つのデータが含まれる。その中で、今回の研究に必要となる磁束密度のデータのみを取り出した。これはベクトルで示されている。このデータの中からコイルに鎖交する  $z$  成分のみを取り出し、さらに鎖交する領域の面積をかけることにより、コイルに鎖交する磁束を得た。

さらに  $V = -Nd\Phi/dt$  よりコイルに誘導される電圧  $V(t)$  を得る。ここで得た  $V(t)$  は、図 2.3, 2.4 に示すように、 $I_0 < I_{c0}$  では線形な信号のみだが、 $I_0 > I_{c0}$  では非線形な信号が乗っているのが分かる。この非線形な応答こそが、薄膜表面に流れる表面電流の変化。すなわち、コイルに流した交流電流によって生じた交流磁界の薄膜に入入りする磁束から生じた  $V_3$  である。

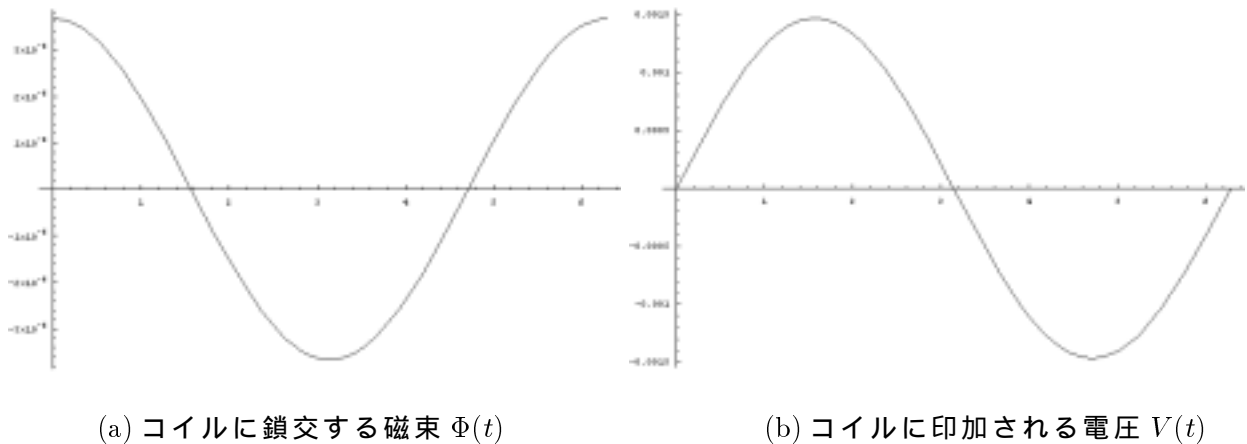


図 2.3.  $I_0 < I_{c0}$  ( $I_0 = 0.5I_{c0}$ ) の磁束と電圧

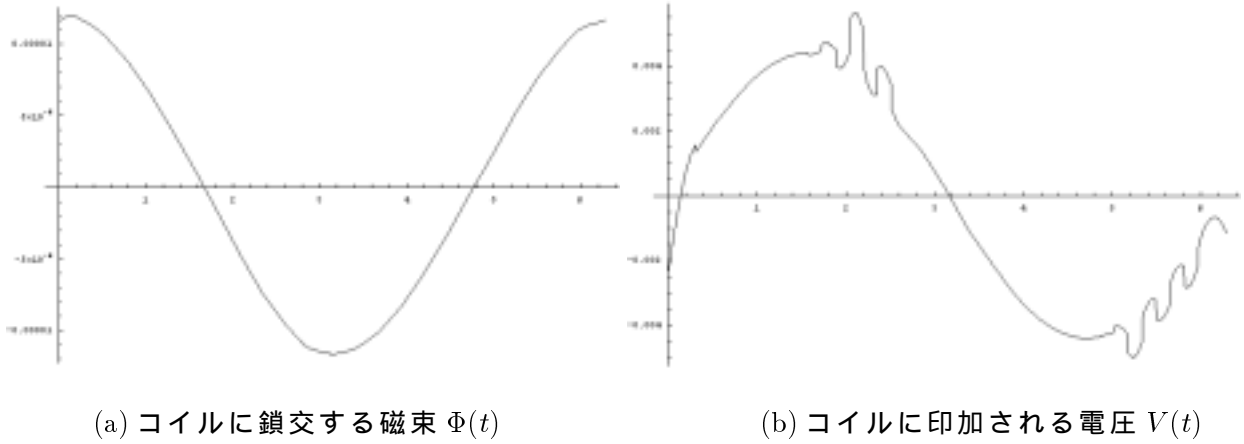


図 2.4.  $I_0 > I_{c0}$  ( $I_0 = 1.5I_{c0}$ ) の磁束と電圧

この  $V(t)$  から (2.2) 式を用いて  $V_3$  得た。

$$V_3 = (\mu'^2 + \mu''^2)^{1/2} \begin{cases} \mu' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(t) \sin 3\omega t \, d\omega t \\ \mu'' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(t) \cos 3\omega t \, d\omega t \end{cases} \quad (2.2)$$

## 2.4 数値計算

### 2.4.1 馬渡らによる理論との比較

馬渡らは、コイルの形状で与えられる関数  $F_2(r)$  を

$$F_2(r) = \frac{N}{4\pi S} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{r'z \cos \theta}{R^3} \, dr' d\theta dz \quad (2.3)$$

$$R = (z^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta)^{1/2} \quad (2.4)$$

としたとき、 $J_c$  と  $I_{c0}$  の関係について図 2.5 に示すような、(2.6) 式の  $\phi(r)$  を最大とする  $r$  を  $r_m$  として、

$$I_{c0} = \frac{J_c d}{\sqrt{2} F_2(r_m)} \quad (2.5)$$

という  $I_{c0}$  が  $J_c$  に比例する理論式を与えており、さらに

$$\phi(r) = \frac{I_0 F_2(r)}{J_c d / \sqrt{2}} = \frac{I_0 F_2(r)}{I_{c0} F_2(r_m)} \quad (2.6)$$

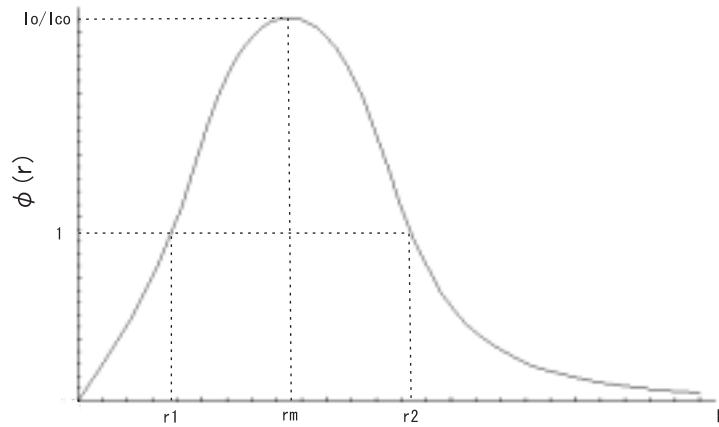


図 2.5.  $I_0 > I_{c0}$  における  $\phi - r$  曲線

において、図 2.5 に示されるような、 $\phi(r) = 1$  となる  $r = r_1, r_2$  を磁束が最初に薄膜を突き抜ける位置としている。 $V_3$  と  $I_{c0}$  の関係についても

$$V_3 \propto \omega I_{c0} (I_0/I_{c0} - 1)^{3/2} \quad (2.7)$$

を導いている。これらの理論式で示された  $I_{c0}$  の値と、これが  $J_c$  に比例すること。また、磁界が最初に薄膜を突き抜ける位置である  $r_1$  及び  $r_2$  の値。さらに  $V_3$  の立ち上がりにおける傾きが  $(I_0/I_{c0} - 1)$  の  $3/2$  乗に比例するという点について、有限要素法で得られたデータとの比較を行った。

#### 2.4.2 不均一な $J_c$ の空間分布による影響

超伝導薄膜内の欠陥が  $V_3$  へ与える影響を調べるために、薄膜内に他の部分より極端に  $J_c$  の劣化した領域を作り  $V_3$  の測定を行った。本来は、薄膜内に空間分布する不均一な欠陥を与えるべきだが、そのためには非対称なモデルを用意する必要があり、今回のモデルでその解析を行うことはできない。そのため、欠陥は図 2.6 のような、コイルの中心から対称なリング状のものとした。リングの幅は 0.1 mm で内径を 0.5, 1.1, 2.0 mm とした 3 つのモデルを作成し、それぞれ解析した。薄膜の  $J_c$  は  $1 \times 10^{10}$  A/m<sup>2</sup> とし、劣化した領域の  $J_c$  は  $1.0 \times 10^9$  A/m<sup>2</sup> とした。

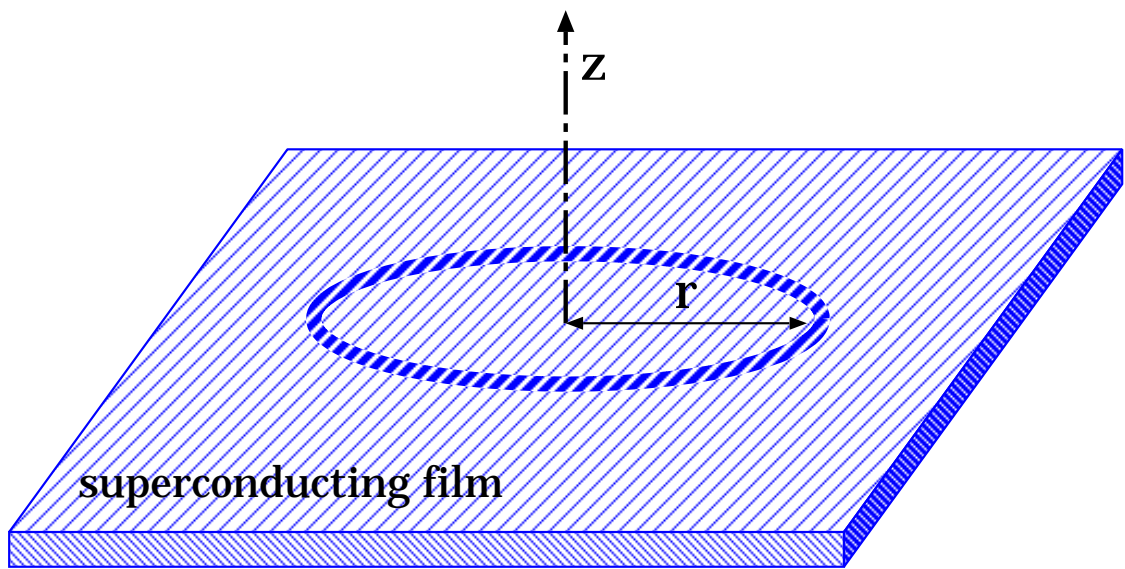


図 2.6.  $J_c$  がリング状に劣化した領域をもつ薄膜

## 第 3 章 実験結果および検討

### 3.1 結果と検討

#### 3.1.1 馬渡らによる理論との比較

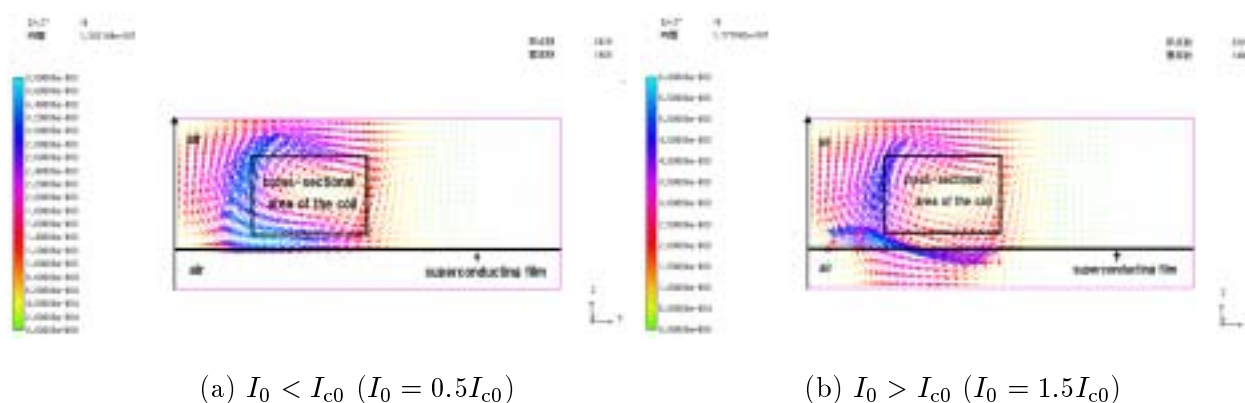


図 3.1. 磁束密度の分布

図 3.1 の (a) と (b) は、 $I_0$  が  $I_{c0}$  より低い場合と、 $I_{c0}$  を越えた場合での磁束密度の様子を示している。 $V_3$  が発生しない (a) では磁界が薄膜によって遮蔽されているのに対し、 $V_3$  が発生する (b) では磁界が薄膜を突き抜けているのが分かる (1 章に述べたように、この論文内での  $V_3$  は  $I_0 > I_{c0}$  で発生するもののみを指す)。磁界が薄膜を貫いたことにより薄膜を境にした鏡像法を用いることができなくなり、図 2.4 に示したような非線形な  $V_3$  の応答が出たと考えることもできる。

図 3.2 はコイルに流す交流電流振幅  $I_0$  と第三高調波振幅  $V_3$  の関係を示している。 $I_0$  を増加していくと、それぞれの  $J_c$  に対応する閾値  $I_{c0}$  を越えたときに  $V_3$  が現れ始めた。これは図 3.1 と対応している。後に示すが、この結果から得られる  $I_{c0}$  は、馬渡らの理論値と定量的に一致している。馬渡らは、 $V_3$  が 0.1 mV に達するときの  $I_0$  を  $I_{c0}$  と定めている。それに従って定めた  $I_{c0}$  で図 3.2 を規格化したものが図 3.3 である。この図は、臨界電流密度



が高い(馬渡らの実験における低磁界)側では、それぞれの  $J_c$  に対応する  $V_3$  曲線がスケールしているが、臨界電流密度が低い(馬渡らの実験における高磁界)側では全くスケールしていない。この結果は、馬渡らの理論よりむしろ、図 3.4 に示す馬渡らが行った実験結果を規格化したものに一致している。馬渡らの実験結果が高磁界側でスケールしなかったことの原因としては様々なことが考えられるが、前にも述べたように、馬渡らはこの原因の一つとして試料中の不均一な  $J_c$  の空間分布を考察している。 $J_c$  分布のない今回の有限要素法を用いた解析で同じ結果を得るということは、この考察を否定することとなる。

しかし、解析を行う中で、低臨界電流密度(高磁界)側では、図 2.4 に示したような  $V_3$  の非線形な応答があり、さらに図 3.1(b) に示されるような、磁界が薄膜を貫いている場合でも、 $V_3$  のオーダーは  $10^{-6}$  程度であることに気づいた。そこで、馬渡らのように全磁界一律で  $V_3$  の値が 0.1 mV になるときの  $I_0$  を  $I_{c0}$  とするのではなく、図 2.4 のような  $V_3$  の非線形な応答が出始めたときの  $I_0$  を  $I_{c0}$  と定め、規格化を行ってみた。これを図 3.5 に示す。その結果、高磁界側においても実験結果のようなスケールのずれはなくなった。この結果から、馬渡らの実験結果も同じ作業をすることでスケールすることができるのではないかと考え、実験結果から相対的に見て  $V_3$  の値が突如大きくなるときの  $I_0$  を  $I_{c0}$  とし規格化を行ってみた。これを図 3.6 に示す。その結果、図 3.4 に比べるとスケールしているものの、やはり高磁界側では明らかにその磁界の強さに関係してスケールが崩れていることが分かる。参考までに図 3.6 における各軸の最大値を大きくしたものを図 3.7 に紹介しておく。このことより、馬渡らが上げた、不均一な  $J_c$  の空間分布が高磁界側でスケールが成り立たない理由の一つであるという考察は妥当であると考えられる。

さて、これまで述べてきたように、馬渡らの実験結果と有限要素法の解析結果は、低臨界電流密度(高磁界)側を除いておおよそ定性的に一致しているが、 $V_3$  の値には大きな開きがある。今回の研究は馬渡らの理論との比較を重点に置いており、 $V_3$  の値そのものについては重要視していないため、この結果についての詳しい考察は行っていないが、この原因としては実験結果の信憑性、あるいは後にも示すような有限要素法の定量的解析の問題が考えられる。

図 3.8 は図 3.5 における  $V_3$  の立ち上がり付近を拡大したものであり、 $V_3$

は  $I_0$  に対して  $3/2$  乗に比例する傾きを持って立ち上がるとする馬渡らの理論値と解析結果を比較したものである。理論値を定量的によくみだしていることが示せた。

ここまでの結果より、一部、定量的な誤差はあるものの、有限要素法を用いた第三高調波発生現象再現と、その数値計算ができることをある程度確認できた。

また、任意の  $J_c$  である  $J_c = 8 \times 10^9 \text{ A/m}^2$  における  $I_{c0}$  と磁束が最初に薄膜を貫く位置  $r_1, r_2$  について、馬渡らの理論式より得られた理論値と、有限要素法による解析結果の比較を表 3.1 に示す。時間の都合上、 $r_1, r_2$  について他の  $J_c$  での解析は行えなかった。有限要素法は単位時間あたりの各要素での現象を数値計算し、それによって得られる離散値を積分することにより解析を行っている。そのため、全体の定性的特性はよく示せるが、一部における定量的特性を正確に示すことは不得意である。そのため、 $I_{c0}$  に関しては比較的によく示せているが  $r_1, r_2$  については誤差が大きかったものと思われる。

表 3.1 理論値との比較

	$I_{c0}$	$r_1$	$r_2$
理論値	0.0543	約 13 mm	約 21 mm
解析値	0.0605	約 15 mm	約 19 mm

図 3.9 は、馬渡らの理論式から得られた  $I_{c0}-J_c$  の理論値と、今回の解析から得られた解析値とを比較したものである。これより  $I_{c0}-J_c$  間には比例関係が成り立っており、その値もおおよそ馬渡らの理論値と一致していることが分かる。しかし全ての  $J_c$  において、解析結果の  $I_{c0}$  が理論値より高い値を示していることより、今回用いた解析方法に改善する点があるか、あるいは有限要素法がそういう性質を持っていると考えられる。この点について、今後検討の余地がある。

今回行った有限要素法による解析結果は、一部の定量的結果を除いて馬渡らの理論とよく一致した。この結果は、 $I_0$  が  $I_{c0}$  を越えたとき、ほとんどの磁束が薄膜に対し平行な領域でのみ磁界は薄膜を貫くが、他の領域では貫かず  $V_3$  への寄与はないという馬渡らの仮定が正しいことを意味する。

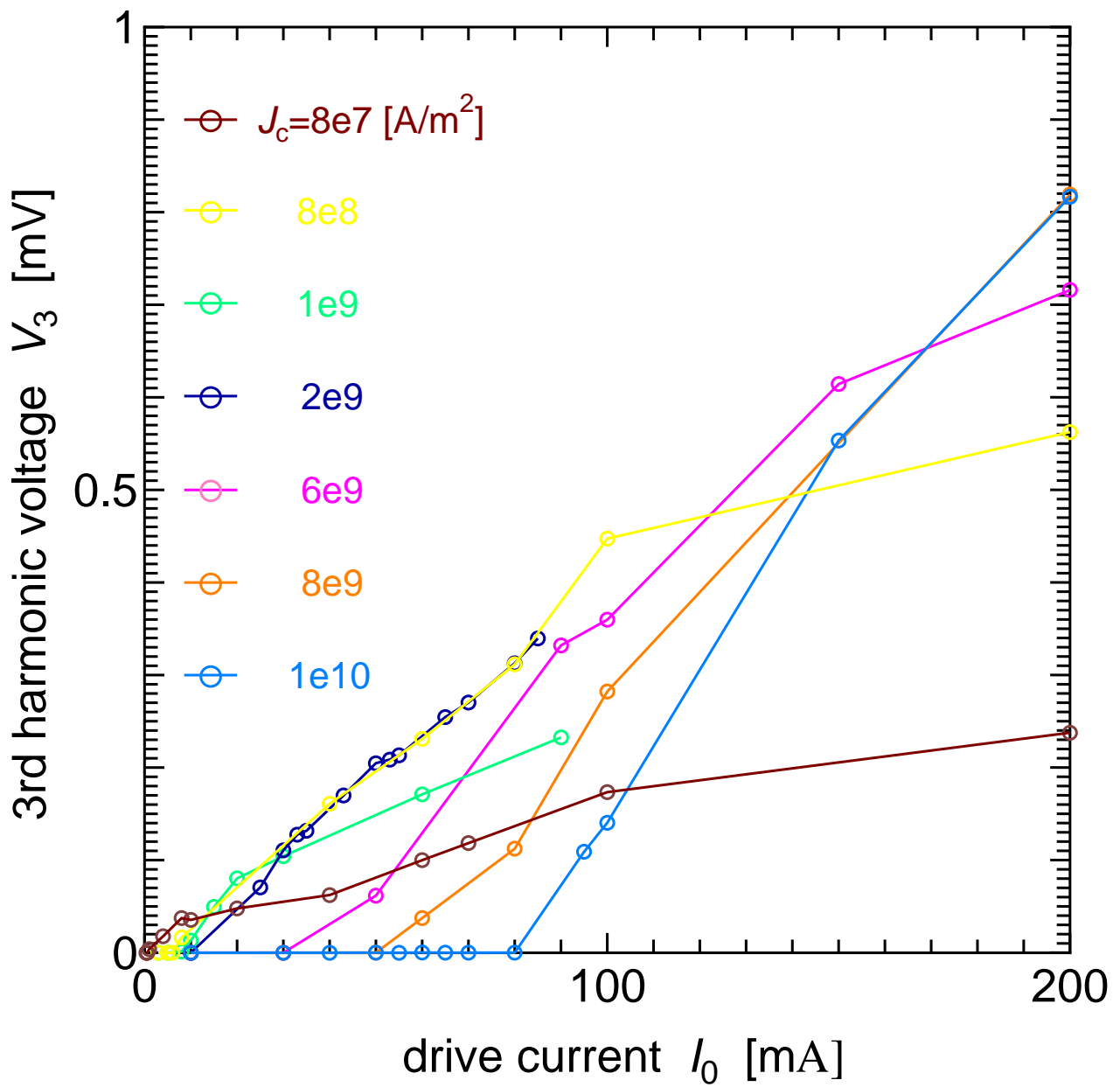


図 3.2. 解析結果の  $V_3$ - $I_0$  曲線

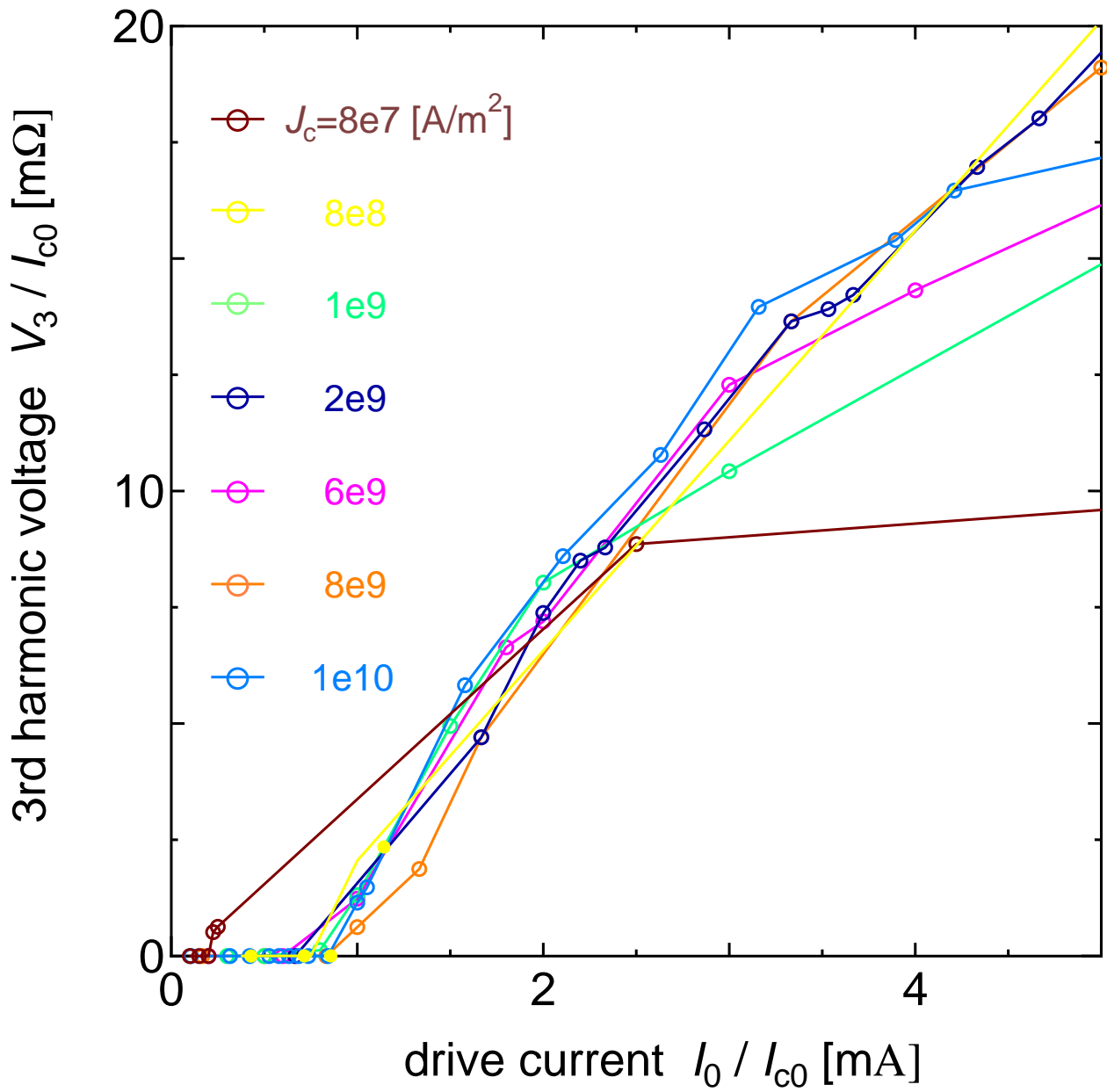


図 3.3. 解析結果を馬渡らの手法で規格化した  $V_3 - I_0$  曲線

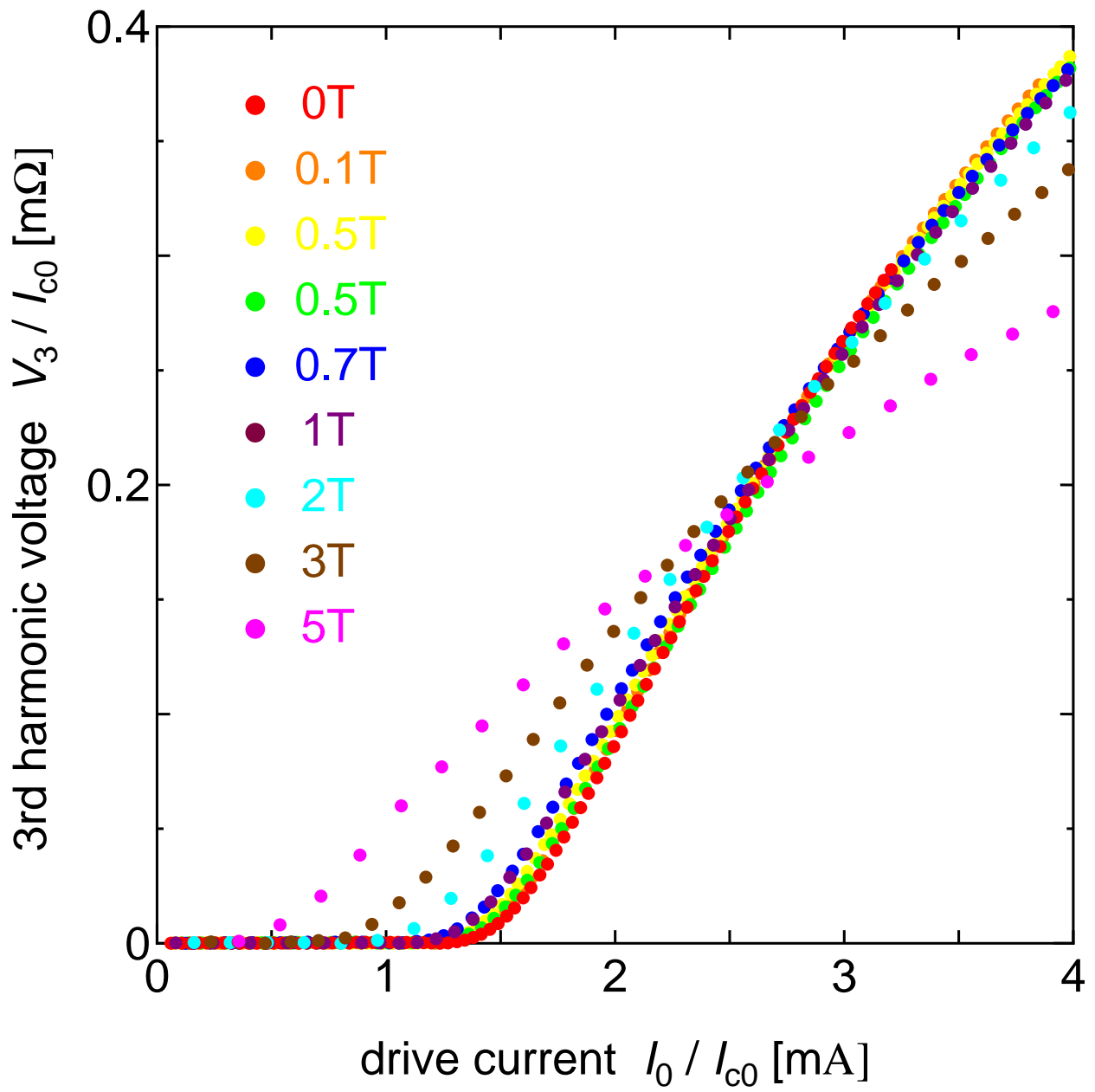


図 3.4. 実験結果を馬渡らの手法で規格化した  $V_3$ - $I_0$  曲線

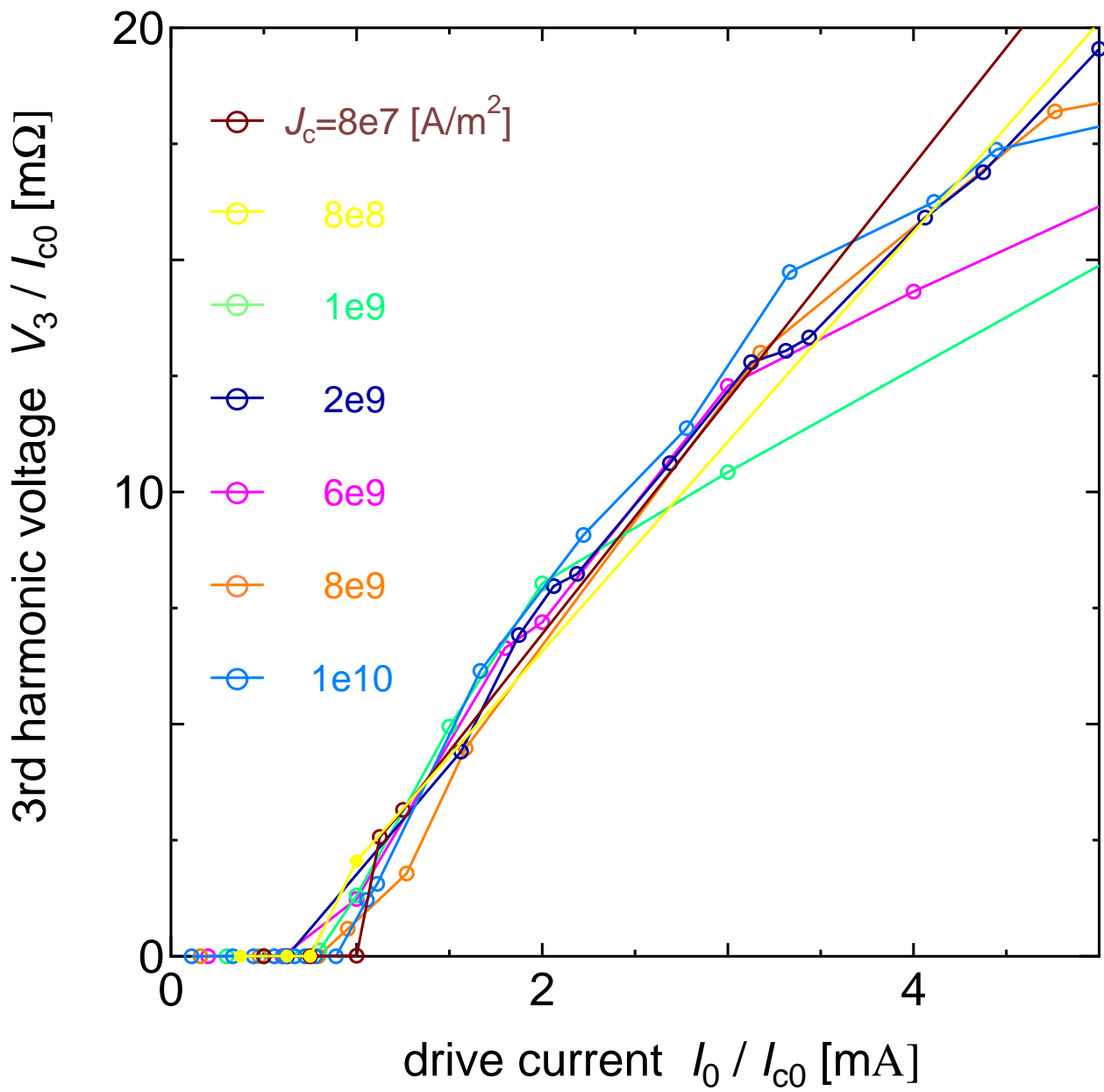


図 3.5. 解析結果を我々の手法で規格化した  $V_3$ - $I_0$  曲線

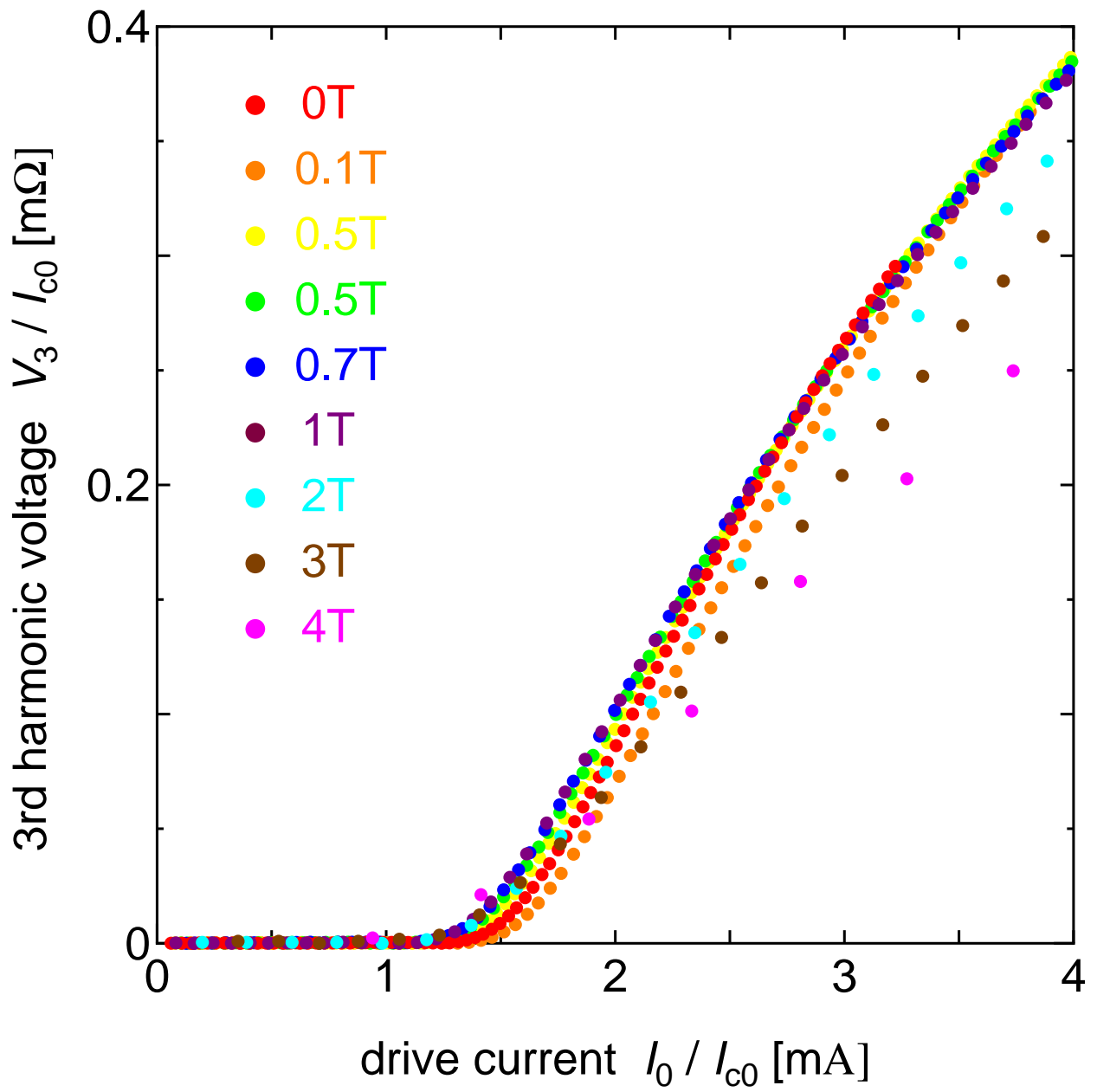


図 3.6. 馬渡らの実験結果を我々の手法で規格化した  $V_3$ - $I_0$  曲線 1

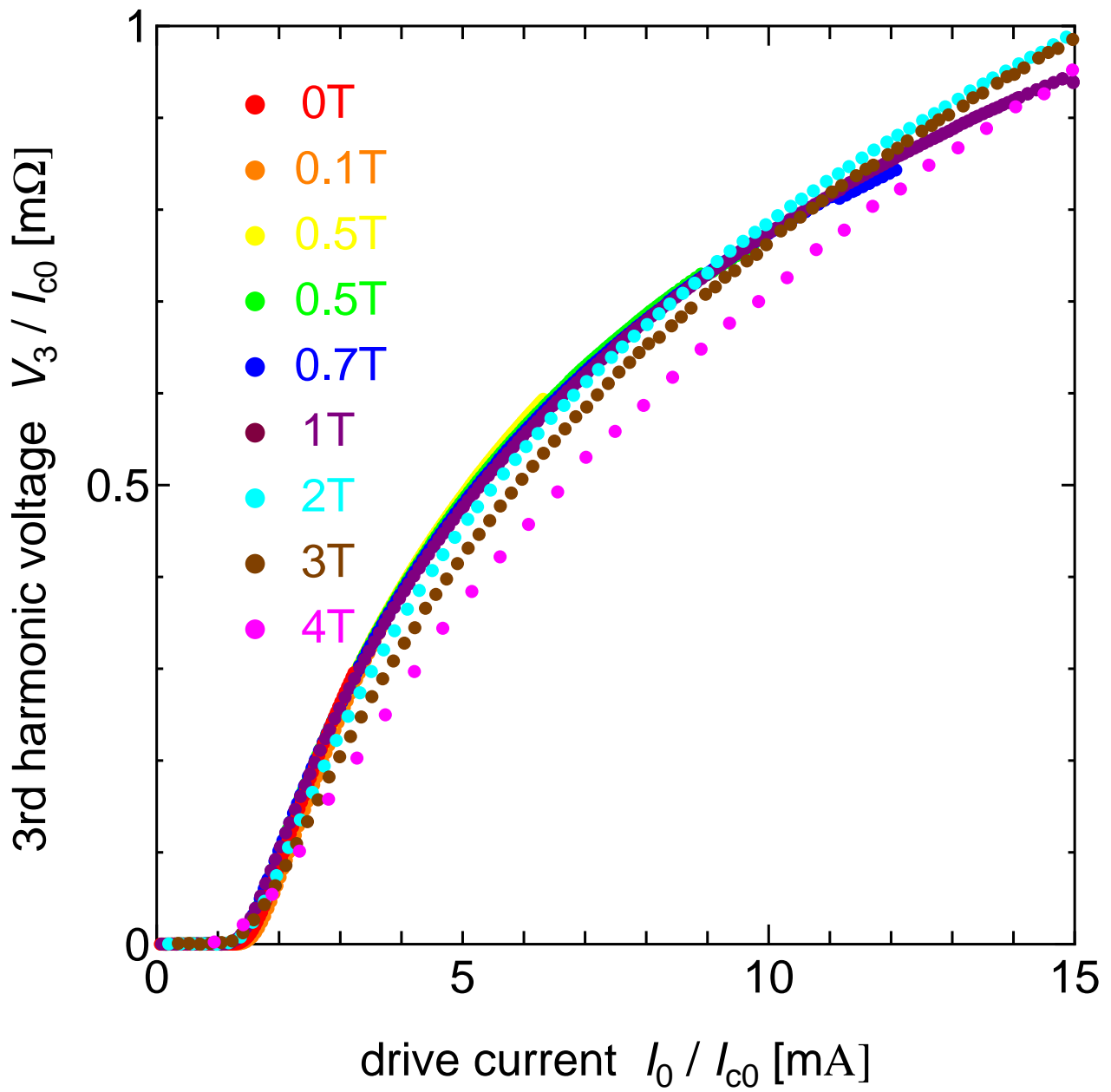


図 3.7. 馬渡らの実験結果を我々の手法で規格化した  $V_3$ - $I_0$  曲線 2



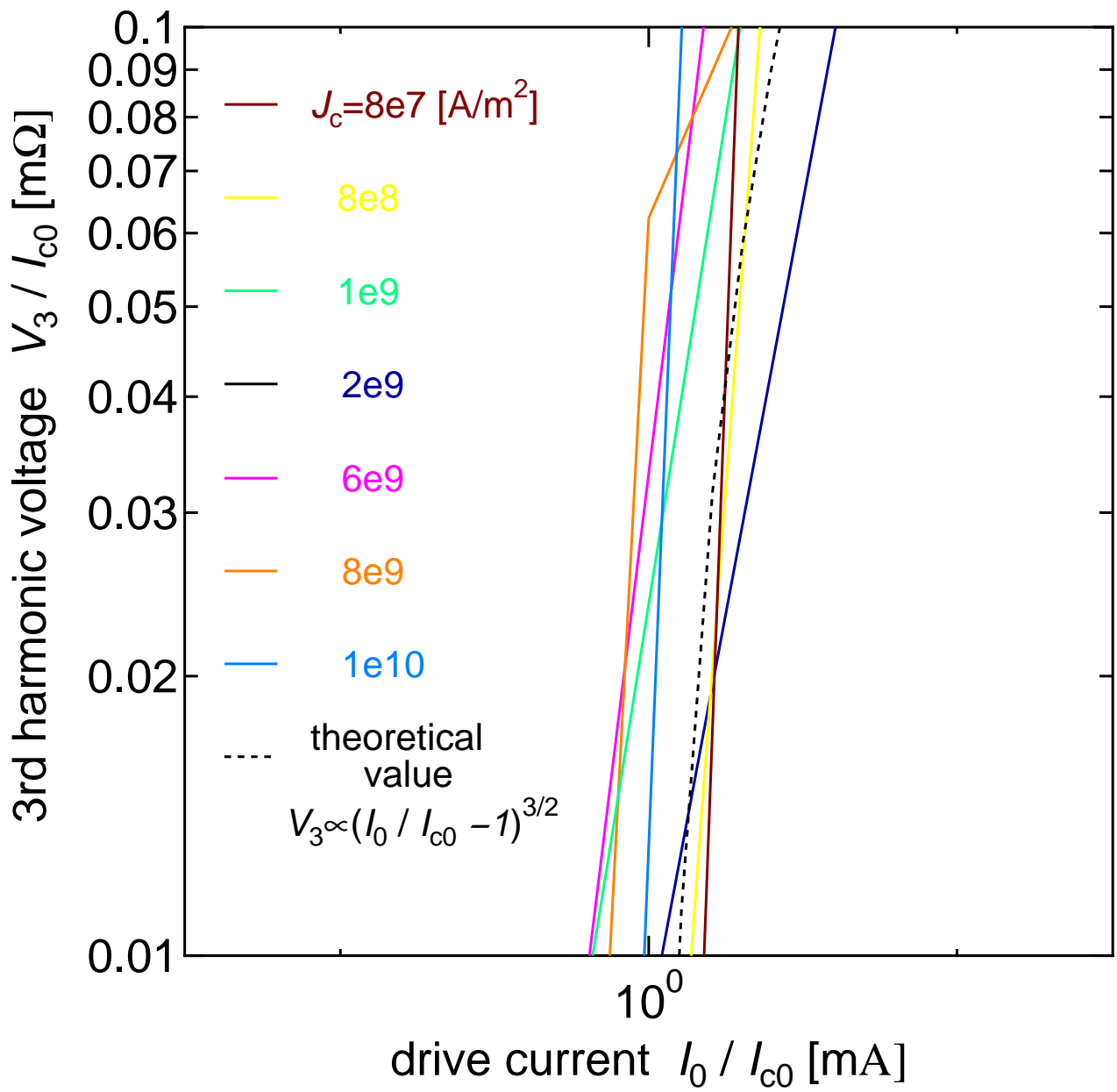


図 3.8. 解析結果の立ち上がりにおける  $V_3$  の傾き

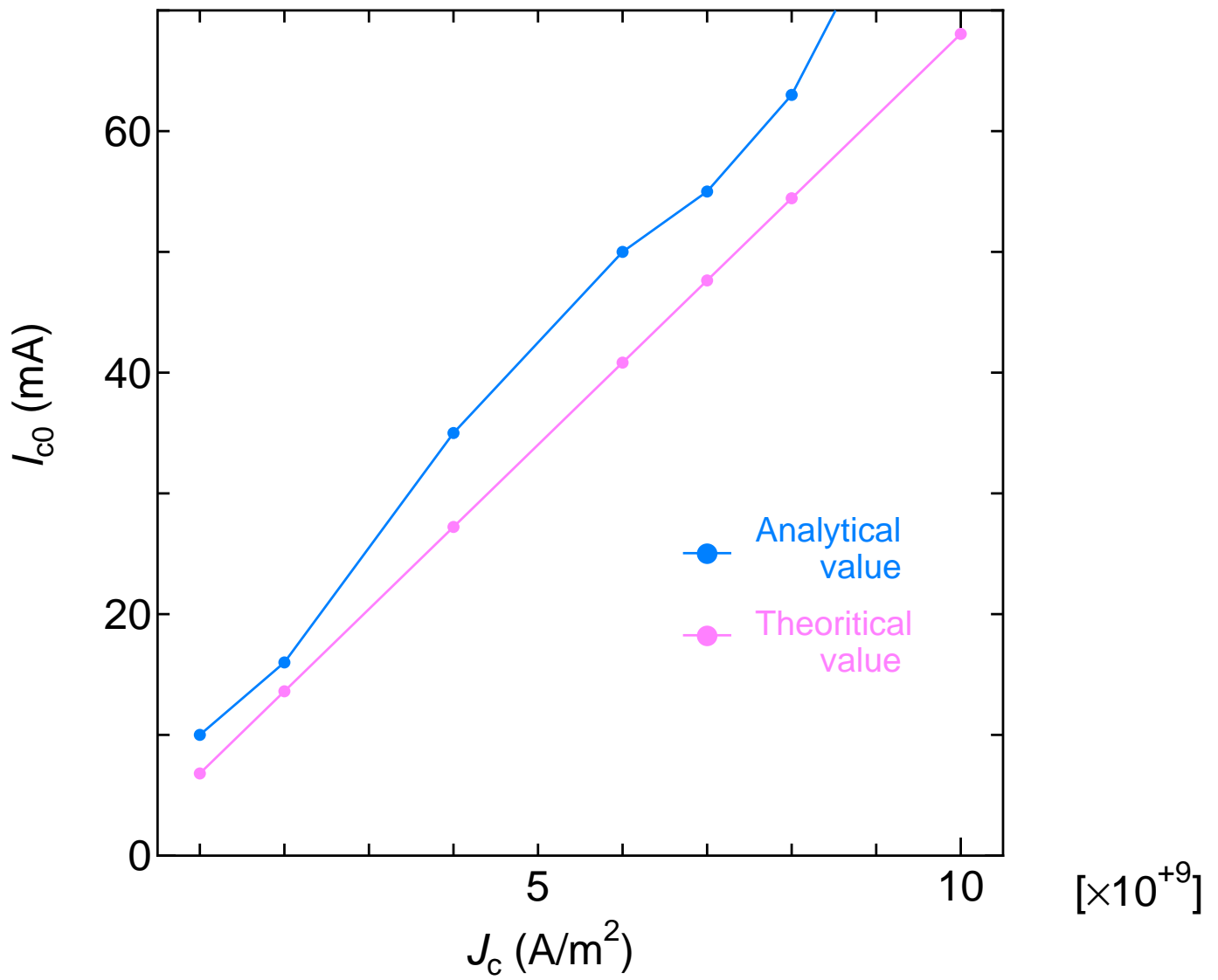


図 3.9.  $I_{c0}$  と  $J_c$  の比例関係

### 3.1.2 不均一な $J_c$ の空間分布による影響

図 3.10は超伝導薄膜内に円状の壊れた領域 ( $J_c$  が他の領域に比べ極端に低い領域) が存在するときの  $V_3$ - $I_0$  曲線を示している。このような欠陥の存在により、 $I_{c0}$  や  $V_3$  曲線がかなり変化しており、また、同じ欠陥でもそれが存在する位置によって、その影響が異なることがわかる。この結果は、超伝導体内の欠陥が確実に  $V_3$  へ影響することを示すと同時に、第三高調波測定による超伝導体欠陥測定アプリケーション作成への可能性を示している。今後、有限要素法で非対称なモデルを作成し、欠陥の形状や性質、分布する位置を指定した上で、 $V_3$  への影響を詳しく解析することができれば、特定の欠陥が  $V_3$  へどのような影響を与えるのかを知ることができる。それができれば、第三高調波の測定によって超伝導体内の欠陥の形状や種類、さらにそれがあある位置をも知ることができるという、実用的な欠陥測定アプリケーションへの応用が期待できる。このことは、広い領域において  $J_c$  を一定にすることが求められる実用超伝導体の作成において非常に有効である。

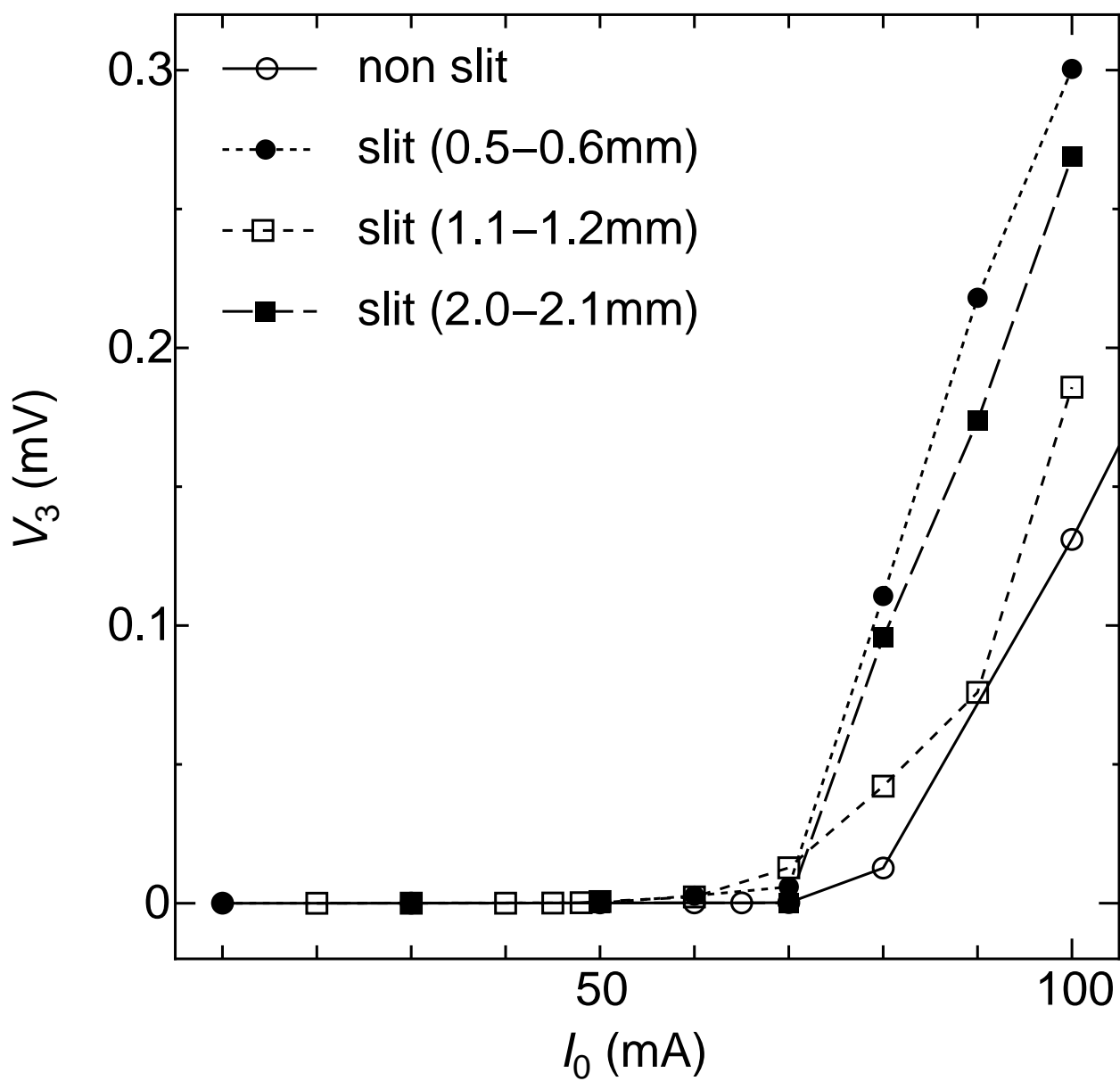


図 3.10. 薄膜内に欠陥がある場合の  $V_3$ - $I_0$  曲線

## 第 4 章 結論と今後の課題

### 4.1 結果と検討

#### 4.1.1 結果

今回の解析で得た結果は以下の 6 点である。

- 有限要素法による数値解析によって、第三高調波  $V_3$  発生再現と、その数値解析ができることを確認した。
- 有限要素法によって得られた結果から  $V_3$ - $I_0$  グラフを作成し、馬渡らの実験結果と比較した結果、定性的に一致した。
- $V_3$  立ち上がり時の  $I_0$  に対する  $V_3$  の傾きについて馬渡らの理論と比較し、定量的に一致した。
- 有限要素法によって得られた結果から、超伝導薄膜の臨界電流密度  $J_c$  と  $V_3$  立ち上がり時にコイルに流れている電流  $I_{c0}$  との関係を馬渡らの理論式と比較し、定性的にも定量的にも一致した。
- 任意の  $J_c$  において、コイルに流した交流電流によって発生した交流磁界が初めに薄膜を貫く位置について、有限要素法によって得られた結果と馬渡らの理論値とを比較し、おおよそ一致した。
- 薄膜内に  $J_c$  の空間分布があるとき、それが  $V_3$  に影響することを確認した。これにより、第三高調波測定が超伝導薄膜の欠陥検出に利用できることを証明するとともに、 $V_3$  測定による超伝導体欠陥測定アプリケーションとしての応用可能性を提議することができた。

#### 4.1.2 検討

本研究を進める上で、馬渡らの理論と定量的比較を行うために、より精度の高いモデルが必要となった。そのため、本論文内に示したモデルとは別に要素数を4倍にしたモデルを作成し、数値解析を行った。有限要素法における要素数と解析結果の信頼性は必ずしも関係しないとされている。しかし、今回の結果から判断すると、やはり要素数を増やしたモデルの方が信頼性は向上した。特に、 $V_3$ の立ち上がり付近では要素数が多いモデルの方が格段によい結果を出力した。ただし、要素数が増えれば増えるほど解析にかかる時間は比例して長くなる。今回の解析の用いた計算機は、Pentium4 2.53G PC2700 512DDR であり現時点でかなり高性能といえるが、それですら一回の解析に2時間を要した。今後、最も適当な要素の取り方を探ることが必要であると思われる。

また、 $J_c$ が $8 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ 以下の $V_3$ について解析を行った結果、要素数を増やしたモデルを使用しても、非常に荒く信頼性の低いデータしか得られなかった。本文内でも述べたが、低臨界電流密度側での $V_3$ の値は非常に小さい。そのため、誤差が与える影響が大きいものと思われる。この誤差については、有限要素法自体の問題や解析上の問題が考えられ、今後いかにしてこれを軽減するかについても検討が必要である。

さらに、今回の実験で用いたモデルは2次元モデルである。これは馬渡らの理論との比較や、有限要素法の $J_c$ 分布に関する評価測定方法としての適用可能性を確認するには、2次元モデルで十分と判断したからである。しかし研究を進める上で、より詳細な評価を行うために、非対称なモデルでの解析が必要になってきた。そのためには3次元モデルでの解析が必要になるが、様々な問題がありまだ結果を得るまでには至っていない。

この研究の究極のテーマは、前述のように第三高調波の測定で得られるデータから、ピンの形状や性質、さらにそれが存在する位置などを測定できるアプリケーションの作成である。その上で、有限要素法を用いた解析は、実験や数値計算が困難な分野を扱うべきである。そのためには今後、非対称な3次元モデルを用いた研究を進めることが避けられない。そのためにも、我々の解析手段を改善することはもちろん、有限要素法に用いるアプリケーション自体の信頼性を向上させることも必要となる。今後の課題は多い。

## 謝辞

本研究を行うにあたり、多大な御指導、御助言を頂いた松下照男教授、小田部荘司助教授に深く感謝します。また、さまざまの折りにご指摘いただいた木内勝助手に深く感謝いたします。そして、何も分からず困惑するばかりだった当初からいろいろと教えていただき、何度も御迷惑をおかけした和田浩志さん、右田稔さんに深く感謝します。最後に本研究を行うにあたり、色々と支援を頂いた松下・小田部研究室の皆さんに深く感謝します。

## 参考文献

- 1) J.H. Claassen, M.E. Reeves, R.J. Soulen Jr., Rev. Sci. Instrum. **62** (1991) 996.
- 2) Y. Mawatari, H. Yamasaki, Y. Nakagawa, Appl. Phys. Lett. **81** (2002) 2424.