

複雑ネットワークの生成と解析

03232068 小田部研究室 増田 誠也

はじめに 我々の身近には様々なネットワークが存在している。インターネット網や送電線のネットワークなどの物理的なもの以外にも、人間が頂点の友人関係ネットワークなど、抽象的な関係を表したネットワークも存在する。このように我々の身の回りの事象はネットワークとして変換されて表され、様々な分野で複雑ネットワークとして研究が展開されている¹⁾。

インターネットなどのネットワークには、極端に多くの接続辺を持つ頂点が存在し、この頂点をハブと呼ぶ。このハブをもつネットワークはすべての頂点(辺)に対して等確率で起こる故障には強いが、意図的にハブを攻撃されると弱いという性質をもつ。このようなネットワークをスケールフリーネットワーク(SN)と呼ぶ。このSNの性質を理解すれば、コンピュータウイルスの拡散防止や感染症の根絶、また必要な情報をすばやくネットワーク全体に広めることが可能になる。そのため、現実のネットワークの特徴を再現する生成モデルを作成し、ネットワークを特徴づける指標や生成過程を理解し、考察することが重要になる。

本研究では、本来スケールフリーの特徴を持たないランダムネットワーク(RN)を用いて、そのネットワークの再構成を試みる。本研究では頂点と頂点を結ぶ辺を次々とつなぎ換えていき、その結果ネットワークがスケールフリーの特徴を示すのかを観測した。

解析方法 RNの辺のつなぎ換えを行う際の基準として統計熱力学で用いられるメトロポリス法を適用する。各頂点に重み $w_i(0 \leq w_i < 1)$ を割り当てる。その重みを合計しネットワークのエネルギー E を次の式で算出する。

$$E = - \sum_{i,j} w_i w_j s_{ij}, \quad s_{ij} = \{0, 1\}$$

s_{ij} が1なら辺がつながっていることを意味し、0ならその頂点間には辺が存在しない。ここで、つなぎ換える辺をランダムに選ぶ。辺をつなぎ換えた後にもう一度 E を算出し、前と後の差 ΔE により、以下の確率でつなぎ換えを採択する。

$$\begin{cases} 1 & ; \Delta E \leq 0 \\ \exp(-\beta \Delta E) & ; \Delta E > 0 \end{cases}$$

ここで、 $\beta = 1/k_B T$, k_B : ボルツマン定数, T : 温度である。このつなぎ換えを繰り返し行う。このように様々な温度 T で辺のつなぎ換えをしていき、 E の変化を調べた。

結果及び検討 図1に E の様々な β における時間変化を示す。元になるRNはつながりがバラバラなので、エネルギーは高い状態にあり、温度 T の値を高くして辺のつなぎ換えを行っても、 E の値はほとんど変化しない。 T の値が大きいと、つなぎ換える条件 $\exp(-\beta \Delta E)$ の確率が高くなり、エネルギーが高い辺のつながりが増えてしまう。 T を低くしていくと、 E は徐々に減少していき、ある値になると定常状態になる。図1を見ると、 T がある程度下がると E の値も一定になり、それ以降は安定な状態になっているのがわかる。この T の値を操作すれば、一度定常状態になったネットワークでも、 T の値を大きくして再度つなぎ換えを行うと E が増加し、RNに戻すということもできる。

図2には、 β が5000で定常状態になったときの次数分布を示す。両対数のグラフにとったときに、直線になっている部分が現れており、べき乗則に従っていることがわかる。RNからSNへ変換するには、つなぎ換えの確率の条件を厳しくすることで実現することができる。このように、ネットワークの再構成に統計熱力学的な考え方を導入することにより、SNの生成を行うことができた。

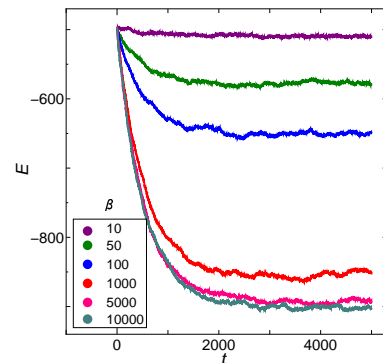


図1：各 β における E の時間変化

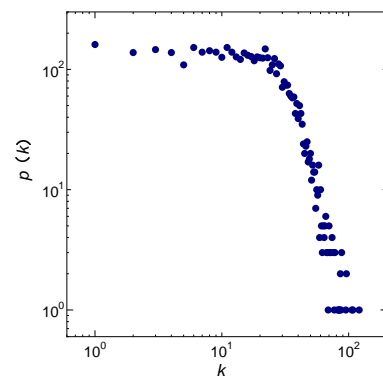


図2： $\beta = 5000$ のときの次数分布

【参考文献】

1) G. Caldarelli *et al.*: Phys. Rev. Lett. **89** (2002) 258702.