

有限要素法を用いた第三高調波電圧誘導法  
測定時における  $n$  値の影響

岩本 賢太郎

平成20年2月26日

電子情報工学科

# Contents

<b>1</b>	<b>序論</b>	<b>1</b>
1.1	はじめに . . . . .	1
1.2	第一種超伝導体・第二種超伝導体 . . . . .	2
1.3	高温超伝導体 . . . . .	2
1.4	測定法 . . . . .	3
1.5	第三高調波電圧誘導法 . . . . .	4
1.6	研究目的 . . . . .	10
<b>2</b>	<b>解析方法</b>	<b>11</b>
2.1	解析モデル . . . . .	11
2.2	解析手順 . . . . .	13
2.2.1	解析方法 . . . . .	14
2.2.2	仮想的な導電率 . . . . .	14
2.3	第三高調波電圧の導出方法 . . . . .	16
2.4	off-set 法による閾値電流の導出方法 . . . . .	16
<b>3</b>	<b>解析結果及び考察</b>	<b>18</b>
3.1	コイルに誘導される電圧 . . . . .	18
3.2	第三高調波電圧と閾値電流 . . . . .	21
3.3	利用可能な $n$ 値の検証 . . . . .	25
3.4	超伝導体内部の磁束密度・電流密度の分布 . . . . .	28
<b>4</b>	<b>結論</b>	<b>33</b>

# List of Figures

1.1	第三高調波電圧誘導法の概略図 . . . . .	5
1.2	第三高調波電圧発生の様子 . . . . .	5
1.3	遮蔽電流の様子 . . . . .	7
1.4	実際の第三高調波発生の様子 . . . . .	8
2.1	解析モデル . . . . .	12
2.2	JMAGで作成した解析モデル . . . . .	13
2.3	off-set 法による閾値電流の導出 . . . . .	17
3.1	コイルに鎖交する磁束 $\Phi$ の様子 . . . . .	19
3.2	コイルに誘導される電圧 $V$ の様子 . . . . .	20
3.3	$V_3-I_0$ 特性 . . . . .	22
3.4	$n = 10$ の場合の $V_3-I_0$ 特性 . . . . .	23
3.5	$n = 20$ の場合の $V_3-I_0$ 特性 . . . . .	23
3.6	$n = 30$ の場合の $V_3-I_0$ 特性 . . . . .	24
3.7	$n = 40$ の場合の $V_3-I_0$ 特性 . . . . .	24
3.8	$n = 25$ の場合の $V_3-I_0$ 特性 . . . . .	26
3.9	$n = 26$ の場合の $V_3-I_0$ 特性 . . . . .	26
3.10	$n = 27$ の場合の $V_3-I_0$ 特性 . . . . .	27
3.11	$n = 28$ の場合の $V_3-I_0$ 特性 . . . . .	27
3.12	$I_0 < I_{th}$ の場合の $B$ および $J$ の分布 . . . . .	30
3.13	$J = J_c$ 周辺の場合の $B$ および $J$ の分布 . . . . .	31
3.14	各 $n$ 値について $J = J_c$ のときの $B$ および $J$ の分布 . . . . .	32

# List of Tables

2.1	コイルおよび超伝導体の諸元 . . . . .	12
3.1	$n$ 値が 10, 20, 30, 40 の場合の $I_{th}$ および $J_c$ と誤差 . . .	22
3.2	$n$ 値が 26, 27, 28 の場合の $I_{th}$ および $J_c$ と誤差 . . . . .	25

# Chapter 1

## 序論

### 1.1 はじめに

1908年にオランダのカメリン-オネス (H. Kamerlingh-Onnes) がヘリウムガスの液化に成功し、このことで1913年にノーベル物理学賞を受賞している。そのオネスによって、水銀の抵抗が4.2 Kで突如ゼロになるという現象、すなわち超伝導転移現象が発見された。この発見以来、超伝導を示す元素・物質が数多く発見されている。

超伝導体の代表的な性質の一つに、前述のとおり低温環境下で電気抵抗が消失するというものがある。オネスの発見以来、およそ20年の間超伝導体は単なるゼロ抵抗・無限大電気伝導度を持つ物質として扱われてきた。しかし1933年、ドイツの研究者マイスナー (W. Meissner) と彼の弟子であるオクセンフェルト (R. Ochsenfeld) によって、超伝導体は磁場を排除する完全反磁性を示すことが発見された。これがマイスナー (・オクセンフェルト) 効果である。

また、1950年に理論物理学者ロンドン (F. London) によって予想された磁束の量子化について、および1956年にクーパー (L. N. Cooper) によって提案されたクーパー対についての証明を1961年にアメリカと西ドイツの大学が実験的に行った。これによって超伝導体の基本的な性質を表す3つの柱である電気抵抗ゼロ・完全反磁性・量子化磁束が、1957年にアメリカのバーディーン (J. Bardeen)、クーパー、およびシュリーファー (J. R. Schrieffer) の3名によって発表された。これは、この3名の頭文字からBCS理論と呼ばれている。

## 1.2 第一種超伝導体・第二種超伝導体

超伝導体には2種類あり、その性質によって第一種超伝導体と第二種超伝導体に分類することができる。まず第一種超伝導体とは、臨界磁場  $H_c$  まではマイスナー効果を維持し、 $H_c$  以上の磁場をかけた場合に完全反磁性が破れ常伝導状態となる超伝導体である。

これに対し、下部臨界磁場  $H_{c1}$  と上部臨界磁場  $H_{c2}$  を持つ超伝導体が第二種超伝導体である。第二種超伝導体においては、磁場が  $H_{c1}$  を超えると量子化された磁束が超伝導体内部に侵入し、その磁束の中心部分は常伝導状態となる。このように、超伝導状態と常伝導状態が共存している状態を混合状態という。そして磁場が  $H_{c2}$  を超えると完全に常伝導状態となる。一般に第二種超伝導体の  $H_{c2}$  は第一種超伝導体の  $H_c$  と比較して数十倍～数百倍のオーダーで大きく、混合状態でも超伝導体の特性を発揮できるため、超伝導体の応用においては第二種超伝導体を混合状態で用いる場合が多い。

## 1.3 高温超伝導体

以前は高価な液体ヘリウム (沸点 4.2 K) によって冷却しなければ超伝導状態にならなかった超伝導体だが、近年の研究によって高い臨界温度  $T_c$  を持つ超伝導体が次々に発見され、安価な液体窒素 (沸点 77.3 K) による冷却で使うことが可能になってきた。しかしながら、これら高温超伝導体は抵抗無しで流すことのできる電流密度である臨界電流密度  $J_c$  が低く、実用化には更なる研究が必要とされている。

現在主流となっている高温超伝導体は、主に Y 系と Bi 系の 2 種類である。Bi 系の超伝導体は熱処理・圧延といった従来の方法で比較的容易に結晶配向が可能であるため、長尺線材の製造が容易であるという利点がある。しかしながら、 $J_c$  が実用レベルに達しておらず、また高磁場中での  $J_c$  の低下が著しいという欠点もある。一方 Y 系の超伝導体は高い  $J_c$  を実現しており、Bi 系超伝導体と比較して高磁場中での臨界電流特性に優れているという利点がある。しかし、従来の方法では結晶配向できず、高価で、長尺線材の製造が困難であるという欠点を持っており、一長一短である。

## 1.4 測定法

近年、各分野において超伝導体を用いた製品の実用化が進みつつある。一例を挙げるならば、例えば医療分野において磁気共鳴装置 (MRI) は既に実用化され、エネルギー分野では超伝導コイルを用いたエネルギー貯蔵装置 (SMES) の実用化が検討されている。他にも超伝導ケーブルやリニアモーターカー、電磁推進船舶に超伝導コンピュータなど、枚挙に遑がない。その一方で、超伝導体の製品への応用が進むにつれて、製造した超伝導体の特性を効率よく評価する方法が求められている。以下に代表的な超伝導体の臨界電流密度の測定方法をまとめる。

- 四端子法

四端子法は試料に直接電流を加えて電圧端子間の電圧降下を測定するという方法で、測定が最も容易で短時間に行えるため世界で最も普及している測定法である。しかしサンプルに直接電流を通電するため、熱やローレンツ力の影響によってサンプルが破壊される可能性がある。またサンプルの加工によって試料が破壊される可能性もある。

- 直流磁化法

直流磁化法は測定が容易であるため普及しているが、遮蔽電流による磁気モーメントのヒステリシスから臨界状態モデルを用いて臨界電流密度を評価するため、電流密度の異方性がある場合はそのまま解析できず、更に弱結合の影響がある場合は間違った値を導くなど、データの信頼性が低下するという短所がある。

- ホール素子法

ホール素子法では、ホール効果を利用して非破壊で磁場の強弱を判別可能である。このホール素子は非常に小型であり、また高磁場中での測定が可能であるというメリットがあるが、ゼロ点の変動が大きいため微小磁場の測定には不向きである。

- 第三高調波電圧誘導法

第三高調波電圧誘導法は、超伝導体の直上に設置したコイルに電流を流した時にコイルに誘導される電圧から  $J_c$  を求める方法である。測定が比較的容易であり、サンプルに直接電流を通電しない誘導法であるため非破壊・非接触での測定が可能である。また、

局所的な特性も容易に評価できること、更にはサンプル上に設置したコイルに通電する交流電流の周波数を変えることで、測定される電界領域を広範囲に渡って調整できるというメリットから、特に大面積サンプルや長尺線材の製造過程での簡易測定法として注目されている。ただしサンプルを磁化させる磁化法の一つなので、上記の直流磁化法と同様のデメリットがある。

このような測定法がある中で、超伝導製品の評価方法として最も適している測定法は、大型・長尺サンプルの特性を効率よく評価可能で、非破壊・非接触での測定が可能な第三高調波電圧誘導法であると考えられる。

## 1.5 第三高調波電圧誘導法

第三高調波電圧誘導法はクラースン (J. H. Claassen) ら [1] によって提唱された測定法で、図 1.1 のようにサンプル直上に AC コイルと pick up コイルを兼ねた微小コイルを設置して測定を行う方法である。微小コイルに交流電流  $I_0 \cos \omega t$  を流すと、それに比例して交流磁場  $H_m \cos \omega t$  が超伝導体表面に印加され、超伝導体には磁場の侵入を防ぐために遮蔽電流が誘導される。通電電流値を徐々に増加させていくと、図 1.2 のように電流値がある閾値  $I_{th}$  に達した所から急激に電圧の第三高調波成分が発生する。臨界状態モデルを仮定した場合、この第三高調波電圧  $V_3$  の発生する電流値と遮蔽電流の限界値が一致するため、このときの通電電流の振幅から  $J_c$  を見積もることが可能である。

図 1.1 の AC コイルに誘導される磁束を  $\Phi$  とすると、

$$\Phi = \Phi_d + \Phi_s \quad (1.1)$$

と表わせる。 $\Phi_d$  はコイルに印加した交流電流  $I_0 \cos \omega t$  から発生した磁束であり、 $L_c$  をコイルの自己インダクタンスとすると、

$$\Phi_d = L_c I_0 \cos \omega t \quad (1.2)$$

と表わせる。一方  $\Phi_s$  は薄膜に流れる遮蔽電流から発生した磁束であり、詳細は後述する。



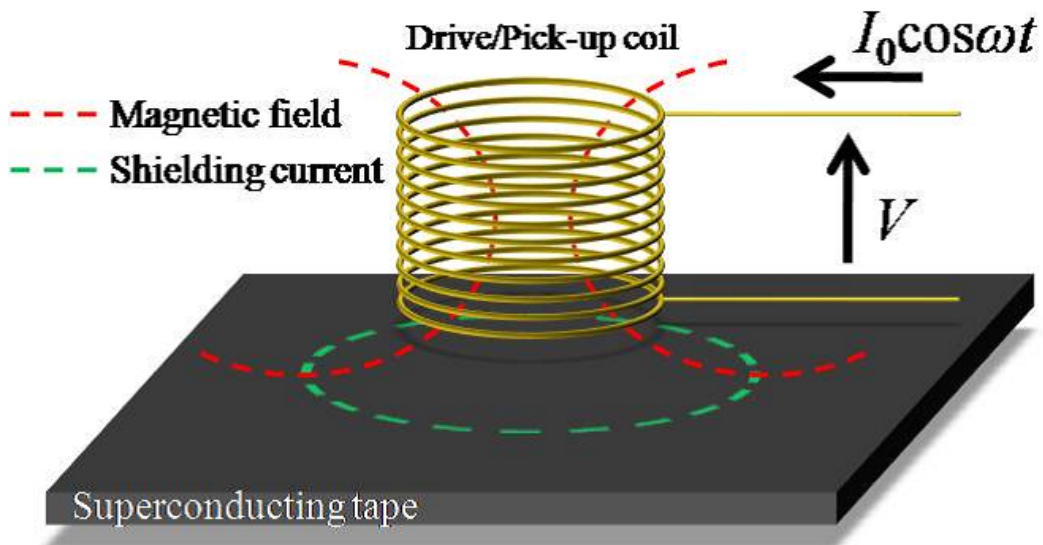
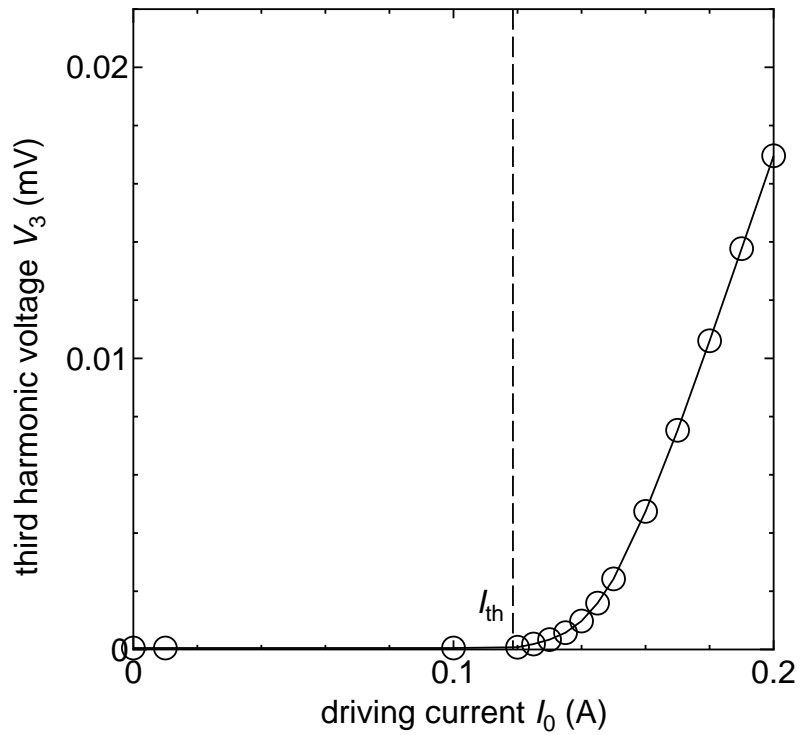
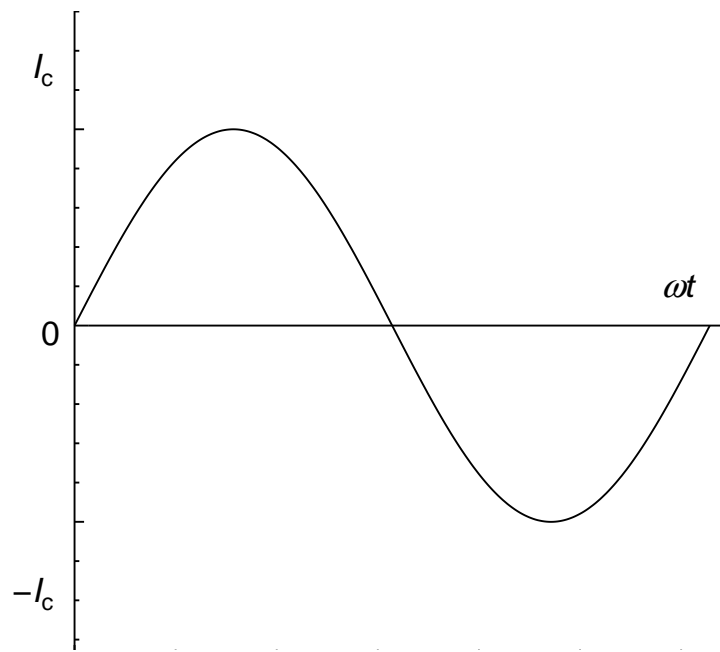


図 1.1: 第三高調波電圧誘導法の概略図

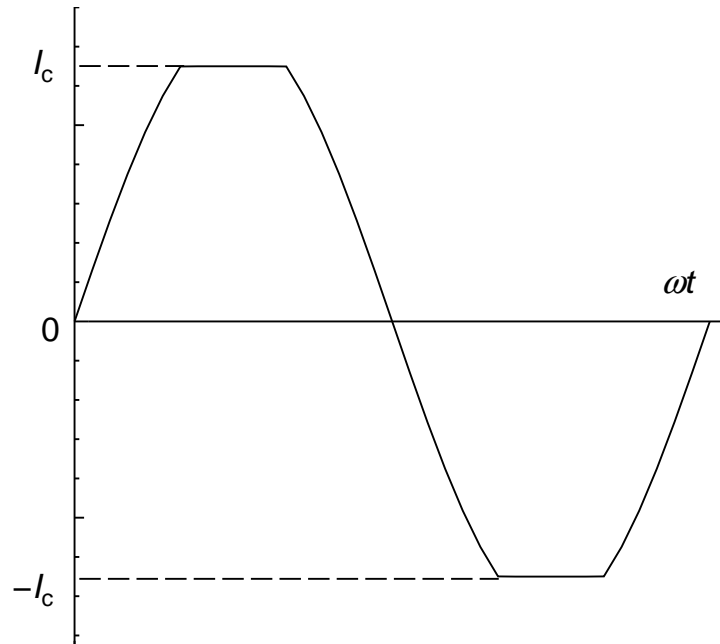


$V_3$ とは(1.1)式の $\Phi$ によって発生する電圧 $V(t)$ をフーリエ級数展開したときの第三次成分である。ここで $\Phi_d$ は基本波成分( $n=1$ )しか持たないため、 $V_3$ の変化に寄与するのは $\Phi_s$ のみとなる。図1.3(a)のように $I_0 < I_{th}$ の場合、薄膜に流れる遮蔽電流はsin波形となり、高調波成分は発生しない。すなわち $V_3$ の値はゼロとなる。しかし図1.3(b)のように $I_0 > I_{th}$ の場合、薄膜に流れる遮蔽電流は臨界電流に達して頭打ちとなり、sin波形ではなくなる。このような波形をフーリエ級数展開すると、sin波形からずれた部分が高調波として現れる。これが第三高調波電圧である。

この $V_3$ が図1.2のように発生すれば理想的だが、実際には超伝導体に有限の厚さがあり、厚さ方向の電流のヒステリシスが発生するため、図1.4のように $I_0 < I_{th}$ の場合でも $V_3$ が発生してしまう。しかしその $V_3$ の変化率は $I_{th}$ を境に大きく変化している。このとき、局所的な $J_c$ は $V_3$ が現れ始める $I_{th}$ に比例していることが経験的に知られており、この比例関係について馬渡ら[2]が理論的に明らかにしている。現在この方法は広い面積の超伝導薄膜の表面近傍にあるコイルを走査させ、薄膜の $J_c$ 分布を測定するのに使われている。この方法は超伝導薄膜以外に超伝導コート線材においても有効であると考えられている。コイルから発生して超伝導薄膜が受ける磁場の強さと高調波電圧の関係は、原理的には臨界状態モデルから理論的に得ることができる。



(a)  $I_0 < I_{th}$



(b)  $I_0 > I_{th}$

図 1.3: 遮蔽電流の様子

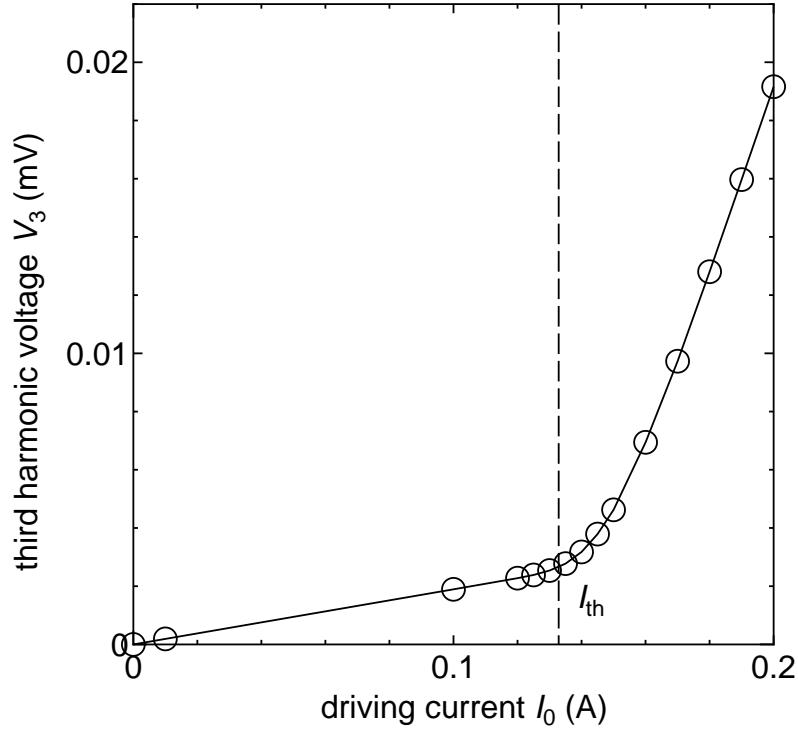


図 1.4: 実際の第三高調波発生の様子

馬渡らの理論によると、図 1.1 のようなモデルを仮定し、座標系は円柱座標系  $(r, \theta, z)$  とし、コイルの中心軸を  $z$  軸、 $z$  軸と薄膜の上面が交わる点を原点とする。また、超伝導薄膜は無限に広いと仮定する。ここで馬渡らによる理論的分析によると、コイルから発生する超伝導体表面上での半径方向 ( $r$  方向) の磁場の強さ  $H_0$  は、

$$H_0(r, t) = -I_0 F_1(r) \cos \omega t \quad (1.3)$$

と表わされる。 $F_1(r)$  はコイルの形状や配置によって与えられる関数であり、

$$F_1(r) = \frac{N}{4\pi S} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{r' z \cos \theta}{R^3} dr' d\theta dz \quad (1.4)$$

ただし、

$$R = \sqrt{z^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta} \quad (1.5)$$

である。ここで  $N$  はコイルの巻き数、 $R_1$  はコイルの内径、 $R_2$  はコイルの外径、 $Z_1$  は薄膜からコイル下部までの距離、 $Z_2$  は薄膜からコイル

上部までの距離、 $S$ はコイルの半径を  $R_1 < r < R_2$ 、長さ方向の位置を  $Z_1 < z < Z_2$  としたときの横断面積であり、 $S = (R_2 - R_1)(Z_2 - Z_1)$  と表わせる。(1.3)式による磁場は超伝導体表面に流れる遮蔽電流によって完全に遮蔽され、薄膜表面に対して平行であると仮定する。この遮蔽電流によって薄膜表面には(1.3)式と同じ大きさの磁場が発生するため、薄膜表面での磁場の強さは  $2H_0$  となる。

次に薄膜に流れる遮蔽電流によって発生した磁束  $\Phi_s$  は、

$$\Phi_s = 2\pi\mu_0 \int_0^\infty r K_s(r, t) F_2(r) dr \quad (1.6)$$

である。ここで  $K_s$  は薄膜に流れる遮蔽電流である。 $|K_s| \leq J_c d$  であり、 $|K_s|$  は  $J_c d$  より大きくなることはない。 $F_2(r)$  はコイルの形状や配置によって与えられる関数であり、

$$F_2(r) = \frac{N}{4\pi S} \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \int_{Z_1}^{Z_2} \frac{r' \cos \theta}{R} dr' d\theta dz \quad (1.7)$$

である。ここで抵抗が無視できるコイルに誘導される電圧  $V(t)$  は  $V = -d(\Phi_d + \Phi_s)/dt$  より、

$$V(t) = \omega L_c I_0 \sin \omega t - 2\pi\mu_0 \int_0^\infty r F_2(r) \frac{\partial K_s(r, t)}{\partial t} dr \quad (1.8)$$

となる。(1.8)式の第一項はコイルに通電した交流電流  $I_0 \cos \omega t$  から発生した磁束  $\Phi_d$  の成分であり、第二項は遮蔽電流  $|K_s|$  から発生した磁束  $\Phi_s$  の成分である。このときの  $V(t)$  をフーリエ級数展開すると、

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n \cos(n\omega t + \theta_n) \quad (1.9)$$

この(1.9)式の  $n = 3$  の項が  $V_3$  である。馬渡らは  $J_c$  と  $I_{th}$  の関係について、磁場が半径方向に最も強い位置を  $r_m$  として、

$$I_{th} = \frac{J_c d}{2F_1(r_m)} \quad (1.10)$$

という理論式を与えている。

## 1.6 研究目的

(1.10) 式によって  $J_c$  と  $I_{th}$  が比例関係にあることが分った。よって、なんらかの方法で超伝導体の臨界電流を求めることができれば、そこから  $J_c$  を求めることが可能である。理想的な超伝導体の場合について考えれば、図 1.2 のように  $V_3$  が発生する時の電流値が臨界電流と一致するためその時の  $I_0$  から  $J_c$  を評価可能である。しかし実際の超伝導体の場合は図 1.4 のように臨界電流以下でも  $V_3$  が発生しており、実際の測定においてはこれにノイズが加わるため、 $V_3$  の立ち上がりを検出することは困難である。

そこで本研究では四端子法の測定でよく用いられている off-set 法に注目した。有限要素法を用いた数値解析結果から off-set 法によって  $I_{th}$  を求め、 $I_{th}$  周辺の超伝導体内部の磁束密度や電流密度の分布を解析することで、第三高調波電圧誘導法によって求まる  $J_c$  の妥当性を検証することを目的とする。

# Chapter 2

## 解析方法

### 2.1 解析モデル

今回の解析に用いたコイルと超伝導薄膜の概略を図 2.1 に示す。コイルおよび超伝導体の諸元は表 2.1 に示す通りで、十分に広い領域を持つ超伝導薄膜表面に対して軸が垂直になるようにコイルを高さ 0.2 mm の位置に設置する。コイルに通電する交流電流は、周波数  $f = 1000$  Hz として、振幅  $I_0$  を変化させる。また、超伝導薄膜内部の磁束密度分布および電流密度分布は、電場  $E$  が電流密度  $J$  の  $n$  乗に比例する  $n$  値モデルを仮定して計算する。超伝導薄膜の臨界電流密度は電界基準  $E_c$  を発生しているときの  $J_c$  である。また、コイルの形状や配置によって決まるコイル定数  $K$  は  $47000 \text{ m}^{-1}$  となる。解析作業には日本総合研究所が提供している JMAG studio version 9.0 を使用する。この JMAG studio を用いて図 2.1 のモデルの枠の部分を図 2.2 のようにモデル化し、解析を行った。図 2.2 にあるように空気・コイル・超伝導薄膜は適当な大きさの要素に分割されており、特に超伝導薄膜は厚さ方向に 10 分割されている。これらの要素一つ一つについて解析することで、超伝導薄膜内部の磁束密度分布・電流密度分布を詳しく知ることができる。このモデルは方位角方向の対称性より、 $1/360^\circ$  分だけ作製して解析している。

表 2.1: コイルおよび超伝導体の諸元

コイル諸元		超伝導体諸元	
内径	0.8 mm	膜厚	500 nm
外径	4.2 mm	臨界電流密度	$2.60 \times 10^{10}$ A/m <sup>2</sup>
高さ	1.0 mm	初期電気導電率	$2.60 \times 10^{14}$ S/m
巻き数	400 turn	最大電気導電率	$2.60 \times 10^{17}$ S/m

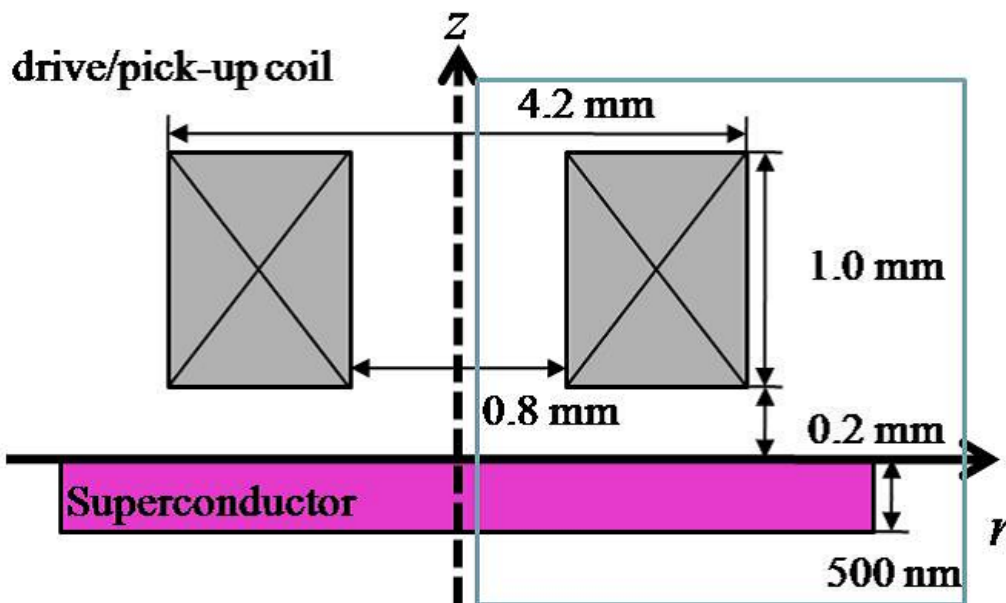


図 2.1: 解析モデル



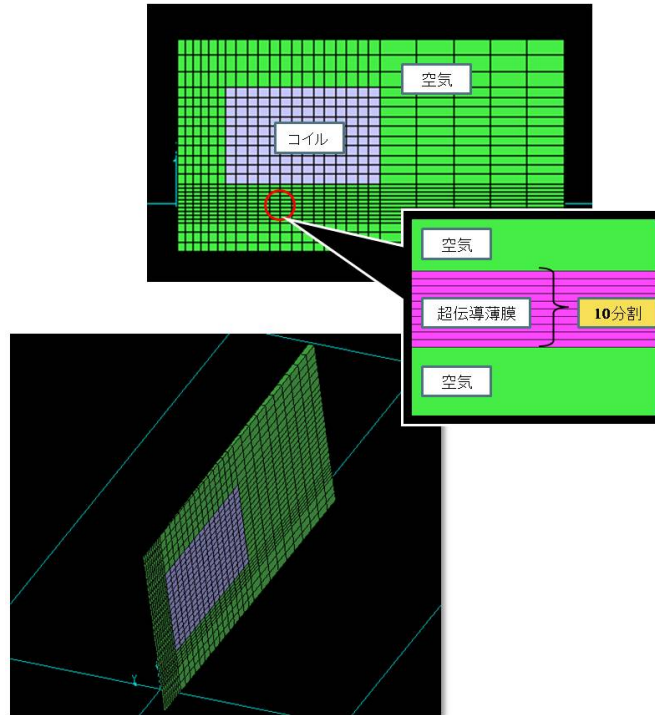


図 2.2: JMAG で作成した解析モデル

## 2.2 解析手順

今研究では有限要素法による数値解析 [3] を用いている。この有限要素法とは、解析的に解くことが難しい微分方程式の近似解を数値的に得る方法の一つである。特徴として、

- 解析対象が複雑な形状であっても、分割さえできれば解析可能である。
- 解析対象が複数の素材によって構成されていても解析可能である。
- 測定の難しい物体内部の様子も解析可能である。

といったことが挙げられる。

## 2.2.1 解析方法

有限要素法による計算には  $A - \phi$  法を用いる。ベクトルポテンシャルを  $A$ 、スカラーポテンシャルを  $\phi$ 、透磁率を  $\mu$ 、導電率を  $\sigma$  とすると、電磁場に関する基本方程式であるアンペールの法則および電流保存則は、

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -\sigma \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \sigma \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) = 0 \quad (2.2)$$

となる。このとき Maxwell 方程式より、磁束密度  $B$ 、電場  $E$ 、電流密度  $J$  はそれぞれ、

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.5)$$

となる。有限要素法では上記 (2.1) ~ (2.5) 式を解析領域の全要素に対して適用させるが、超伝導体については  $\sigma$  に代わって以下に述べるような仮想的な導電率  $\sigma_s$  を導入することでその非線形性を表現する。

## 2.2.2 仮想的な導電率

前述の通り今解析では  $n$  値モデルを考慮しているため、高温超伝導体の  $E$  と  $J$  の関係は、基準となる電場  $E_c$  を発生している時の電流密度 (臨界電流密度) を  $J_c$  として、

$$E = E_c \left( \frac{J}{J_c} \right)^n \quad (2.6)$$

と表わせる。このときの指数  $n$  は超伝導-常伝導転移の鋭さであり  $n = 1$  の時が常伝導体に相当する。また  $n = \infty$  の時が Bean モデルに相当し、

電流密度はゼロか  $J_c$  のどちらかとなる。この (2.6) 式と (2.4) 式から  $E$  を消去して仮想的な導電率を  $\sigma_s$  とすると、

$$\sigma_s = \frac{J_c}{E_c} \left( \frac{J_c}{J} \right)^{n-1} \quad (2.7)$$

となる。これを (2.1) ~ (2.5) 式の  $\sigma$  の代わりに用いる。 $\sigma_s$  は非線形性を持つので、各解析時刻において非線形の収束反復計算を行う。収束判定には  $\sigma_s$  の変化量 (前時刻との差  $\Delta\sigma_s$ ) と誤差範囲  $\epsilon$  を利用して解析領域全体に対して、

$$\frac{\sum \Delta\sigma_s}{\sum \sigma_s} < \epsilon \quad (2.8)$$

が成立することを条件として用いる。ここで初期導電率を、

$$\sigma_{\text{init}} = \left( \frac{J_c}{E_c} \right) \quad (2.9)$$

から求め、計算精度を保証するため上限値  $\sigma_{\text{max}}$  を指定する。上記の考え方に基づいた各時刻での反復計算手順を以下にまとめる。

1. 初期導電率を設定する。
2. (2.1), (2.2) 式の電磁場方程式を解く。
3. (2.4) ~ (2.5) 式から電場と電流密度を求める。
4. (2.7) 式に従い  $\sigma_s$  を計算し、  
(2.8) 式が満たされれば次の時刻計算へ。
5. 新たな  $\sigma_s$  が  $\sigma_{\text{max}}$  を超える場合は  $\sigma_{\text{max}}$  で置換する。
6. ステップ 2 へ戻る。

## 2.3 第三高調波電圧の導出方法

上記のような計算を JMAG studio で行い、各電流の各位相における磁束密度・電流密度・コイルに鎖交する磁束を求めた。このとき、コイルに鎖交する磁束の単位時間あたりの変化量から、

$$V = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (2.10)$$

によってコイルに誘導される電圧  $V(t)$  を計算できる。この  $V(t)$  を用いて、

$$V_3 = \sqrt{V_3'^2 + V_3''^2} \quad (2.11)$$

ただし、

$$V_3' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(t) \sin 3\omega t \, d\omega t$$

$$V_3'' = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} V(t) \cos 3\omega t \, d\omega t$$

によって  $V_3$  を求めることができる。

## 2.4 off-set 法による閾値電流の導出方法

2.3 節のようにして求めた  $V_3$  を  $I_0$  で除すことで  $V_3/I_0-I_0$  特性を求める。ここで図 2.3 のように直線 (破線) を 2 本引き、その交点の値を閾値電流とする。

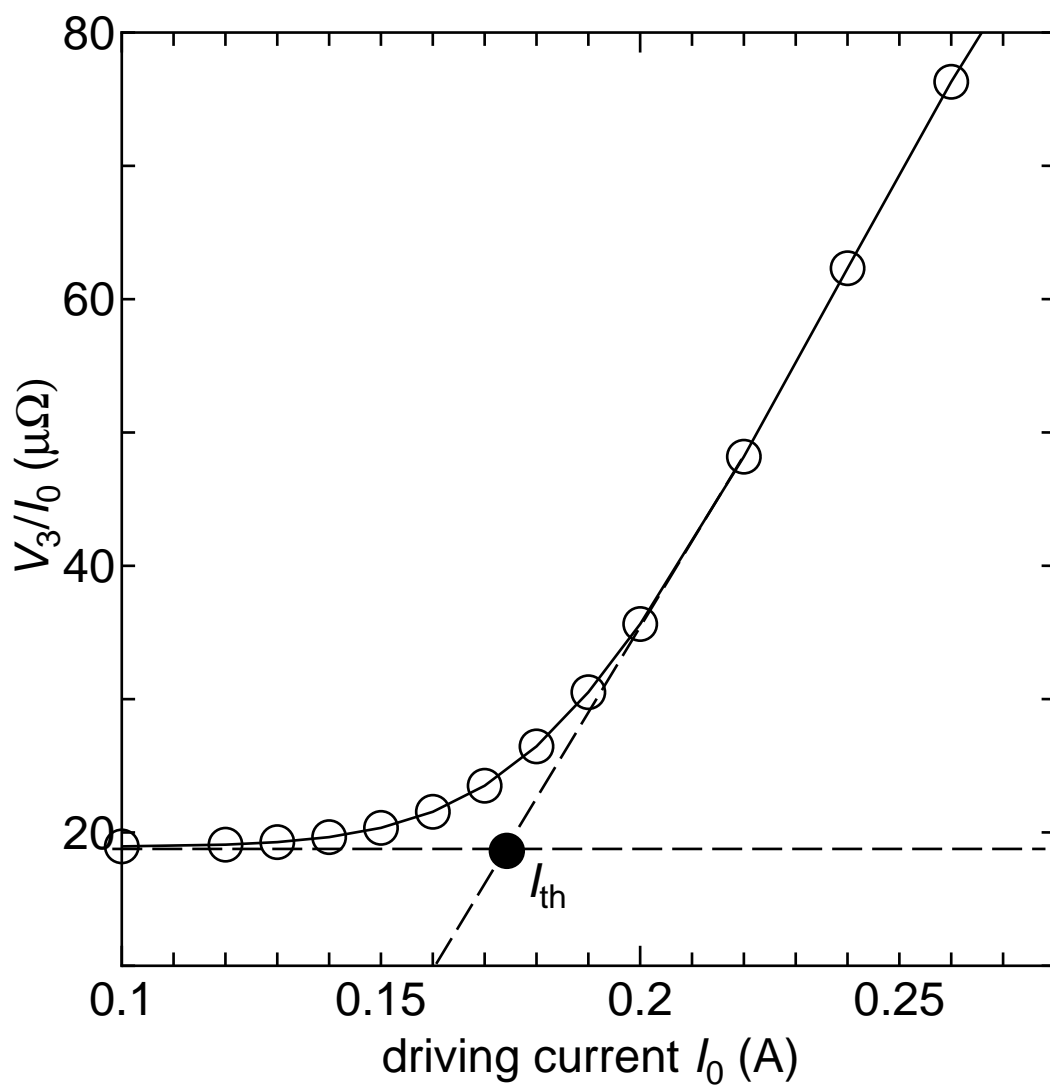


図 2.3: off-set 法による閾値電流の導出

# Chapter 3

## 解析結果及び考察

### 3.1 コイルに誘導される電圧

まずコイルに通電した時に誘導される電圧を求めた。3.2節で述べるが、 $n$  値が30の時  $I_{th} = 0.140$  A となる。これを踏まえて、図3.1(a)に  $I_{th}$  よりも十分小さな電流  $I_0 = 0.100$  A をコイルに通電した時にコイルに鎖交する磁束  $\Phi$  の時間変化を、図3.1(b)に  $I_{th}$  よりも十分大きな電流  $I_0 = 0.200$  A をコイルに通電した時にコイルに鎖交する磁束の時間変化を示す。図3.1(a)では超伝導薄膜が臨界状態に達していないため、遮蔽電流は通電電流に対して線形に応答し、コイルに鎖交する磁束も正弦波となる。しかし図3.1(b)では超伝導薄膜が臨界状態に達しているため、遮蔽電流は通電電流に対して非線形に応答し、コイルに鎖交する磁束も不規則になるはずだが、図3.1では波形の乱れは確認し難い。しかし、(2.10)式より磁束の単位時間当たりの変化量からコイルに誘導される電圧  $V$  を求めると、図3.1(a), (b)はそれぞれ図3.2(a), (b)のようになり、 $I_{th}$  以上の電流をコイルに流した図3.2(b)において誘導される電圧  $V$  が正弦波から外れた不規則な波形になっていることが分かる。図3.2(a)のような波形ならば単一の正弦波を用いてほぼ表現可能であるが、図3.2(b)のような波形は複数の正弦波の重ね合わせによって表現する他無い。そのため、コイルに誘導される電圧  $V$  をフーリエ級数展開することで得られる高調波成分、特に振幅の一番大きな第三高調波成分を検出することで  $I_{th}$  を求めることが可能である。

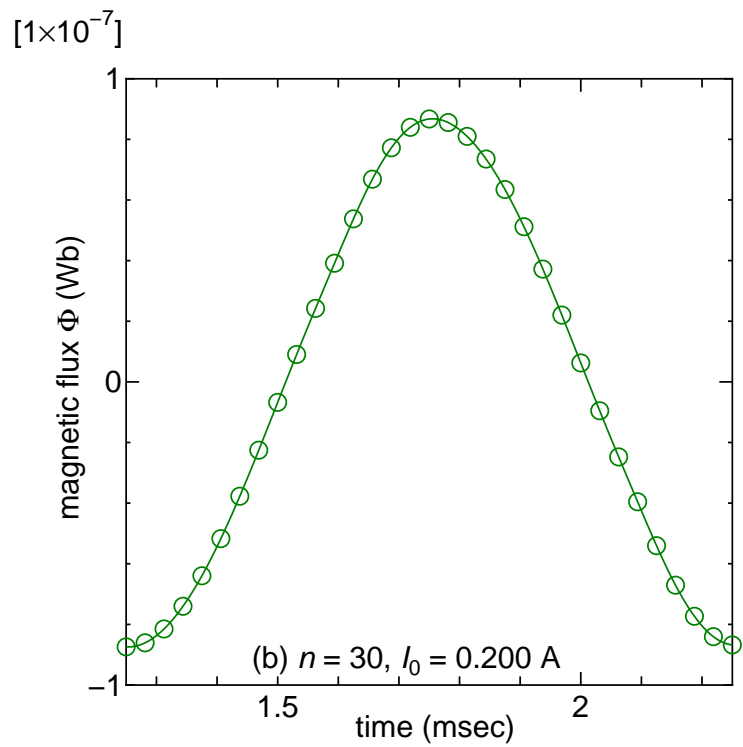
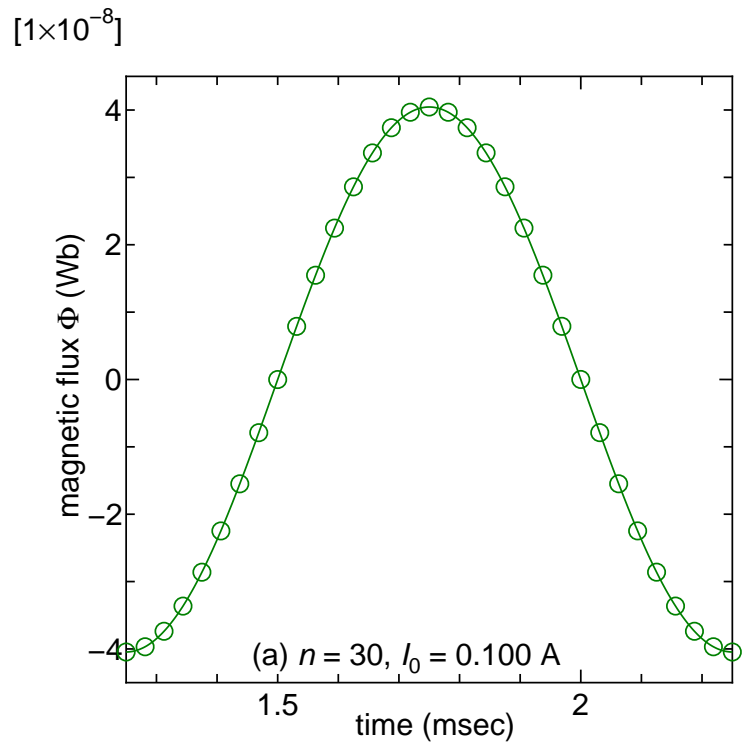


図 3.1: コイルに鎖交する磁束  $\Phi$  の様子

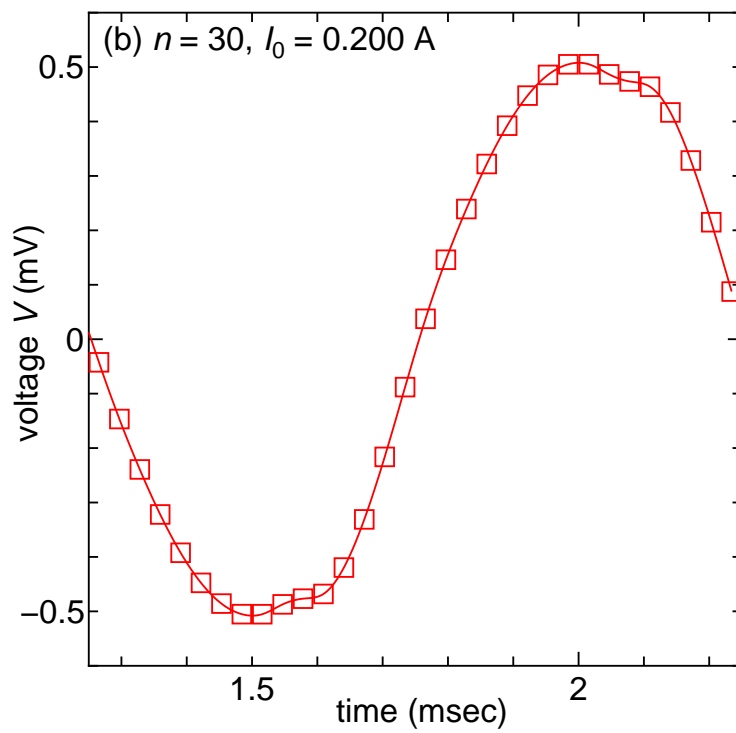
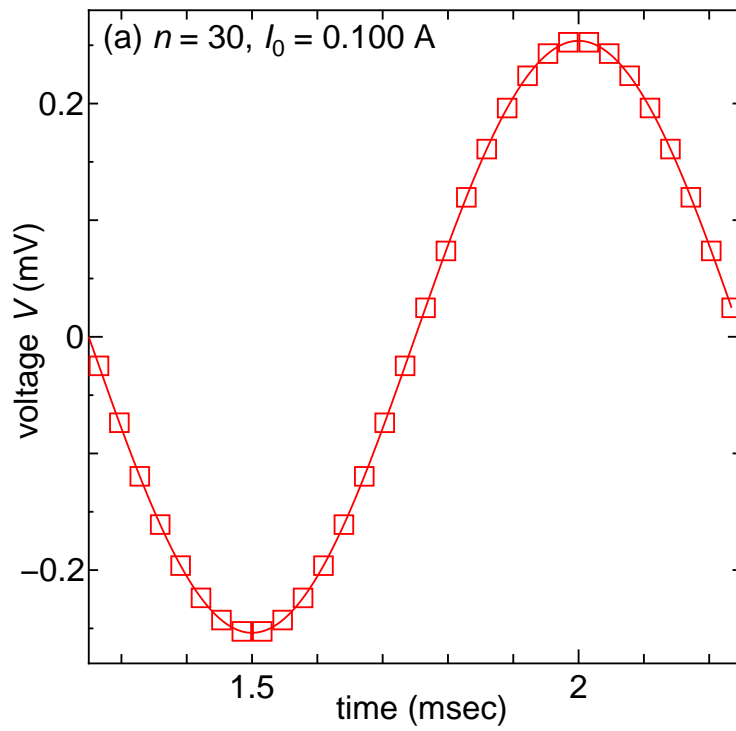


図 3.2: コイルに誘導される電圧  $V$  の様子



## 3.2 第三高調波電圧と閾値電流

図3.3は、コイルに通電した各電流値  $I_0$  におけるコイルに誘導される電圧の第三高調波成分  $V_3$  を、 $n$  値が 10, 20, 30, 40 の場合について求めたものである。図3.3より、いずれの  $n$  値においても  $I_0$  が 0.140 A 付近で  $V_3$  の傾きが変化しており、 $I_{th}$  は 0.140 A 付近であることが予想できる。また  $I_{th}$  を境に  $n$  値が大きいほど  $V_3$  が急激に増加していることも読み取れる。更に、1.6 節でも述べたように  $I_{th}$  以下の電流値においても緩やかに  $V_3$  が発生していることが読み取れる。ここで、挿入図は  $V_3$  の傾きの変化を明確にするために縦軸の  $V_3$  を  $I_0$  で除した  $V_3/I_0-I_0$  特性であり、この  $V_3/I_0-I_0$  特性のグラフに off-set 法による接線を引くことで  $I_{th}$  を求める。

図3.4~3.7に、 $n$  値が 10, 20, 30, 40 の場合の  $V_3-I_0$  特性および  $V_3/I_0-I_0$  特性を個別にまとめ、off-set 法を用いて各  $n$  値における  $I_{th}$ 、 $J_c$  および  $J_c$  の誤差を求め表3.1にまとめた。本研究では  $V_3/I_0$  の傾きが安定する  $V_3/I_0 = 50 \mu\Omega$  付近から引いた接線を基準とし、 $V_3/I_0 = 40 \mu\Omega$  および  $60 \mu\Omega$  付近から引いた接線より求めた  $I_{th}$  を接線の引き方による  $I_{th}$  の誤差とする。また、解析結果から off-set 法を用いて求めた  $I_{th}$  から計算した  $J_c$  と、電界基準  $E_c$  が発生している時の基準的な  $J_c = 2.60 \times 10^{10} \text{ A/m}^2$  との差をパーセントで表したものを基準的な  $J_c$  との誤差とする。たとえば  $n$  値が 10 の時、 $J_c$  は  $(3.25 \pm 0.190) \times 10^{10}$  となっている。 $(3.25 + 0.190) \times 10^{10} \text{ A/m}^2$  つまり  $3.44 \times 10^{10}$  のとき基準的な  $J_c \text{ A/m}^2$  からの誤差は 32% となり、 $(3.25 - 0.190) \times 10^{10} \text{ A/m}^2$  つまり  $3.06 \times 10^{10} \text{ A/m}^2$  のときに基準的な  $J_c$  からの誤差は +18% となる。

表3.1より、 $n$  値が大きくなるにつれ接線の引き方による  $I_{th}$  の誤差は小さくなり、求まる  $J_c$  の値も基準的な  $J_c$  である  $2.60 \times 10^{10} \text{ A/m}^2$  に収束していることが分かる。また基準的な  $J_c$  との誤差の範囲も  $n$  値が増加するにつれて狭くなっていることが分かる。ここで、実際の測定において許容できる誤差の範囲を  $\pm 5.0\%$  とすると、求まる  $J_c$  が基準的な  $J_c$  と比較して誤差  $\pm 5.0\%$  以内に収まっているのは  $n$  値が 30 以上の場合であると言える。

表 3.1:  $n$  値が 10, 20, 30, 40 の場合の  $I_{th}$  および  $J_c$  と誤差

$n$ 値	$I_{th}$ (A)	$J_c$ (A/m <sup>2</sup> )	基準的な $J_c$ との誤差 (%)
10	$0.173 \pm 0.010$	$(3.25 \pm 0.190) \times 10^{10}$	+18 ~ +32
20	$0.146 \pm 0.005$	$(2.74 \pm 0.100) \times 10^{10}$	+1.5 ~ +9.2
30	$0.140 \pm 0.002$	$(2.63 \pm 0.040) \times 10^{10}$	-0.39 ~ +2.7
40	$0.138 \pm 0.001$	$(2.59 \pm 0.020) \times 10^{10}$	-1.2 ~ +0.39

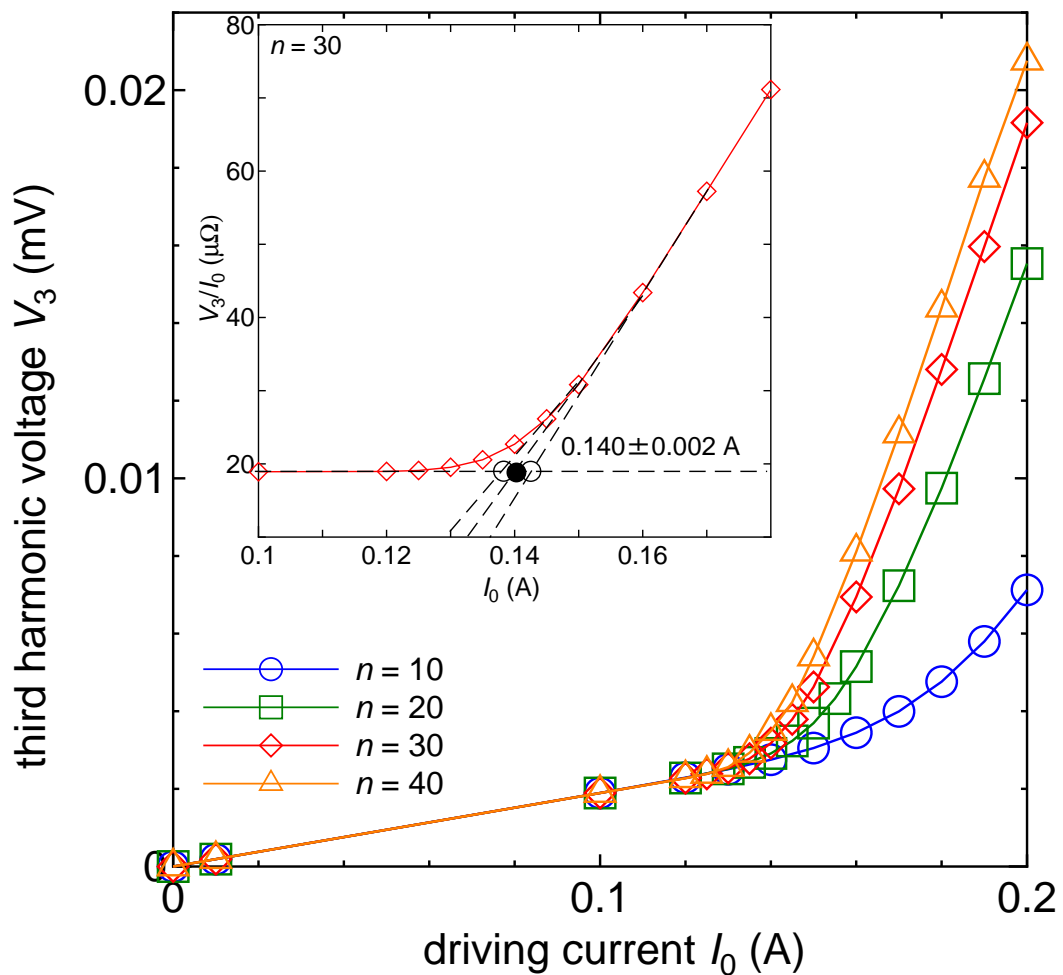


図 3.3:  $V_3$ - $I_0$  特性

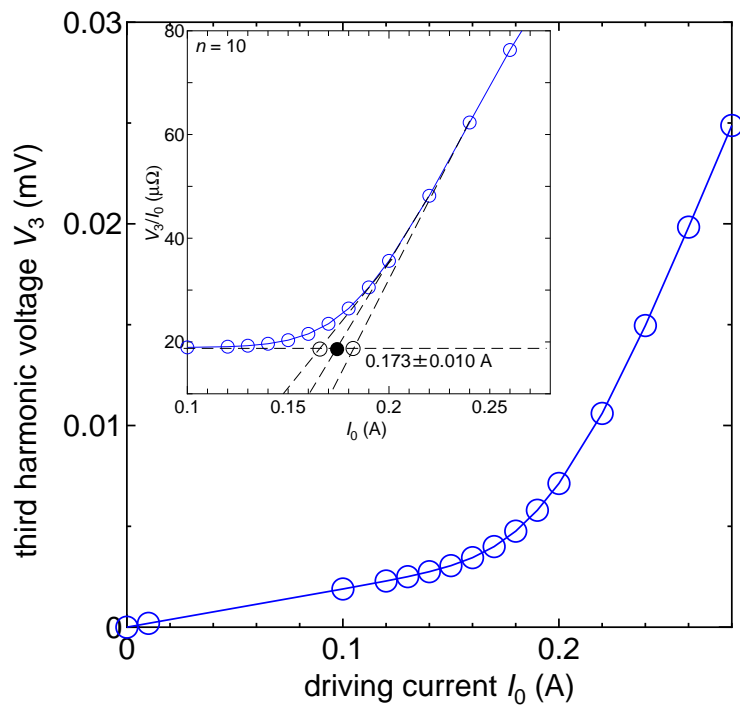


図 3.4:  $n = 10$  の場合の  $V_3$ - $I_0$  特性

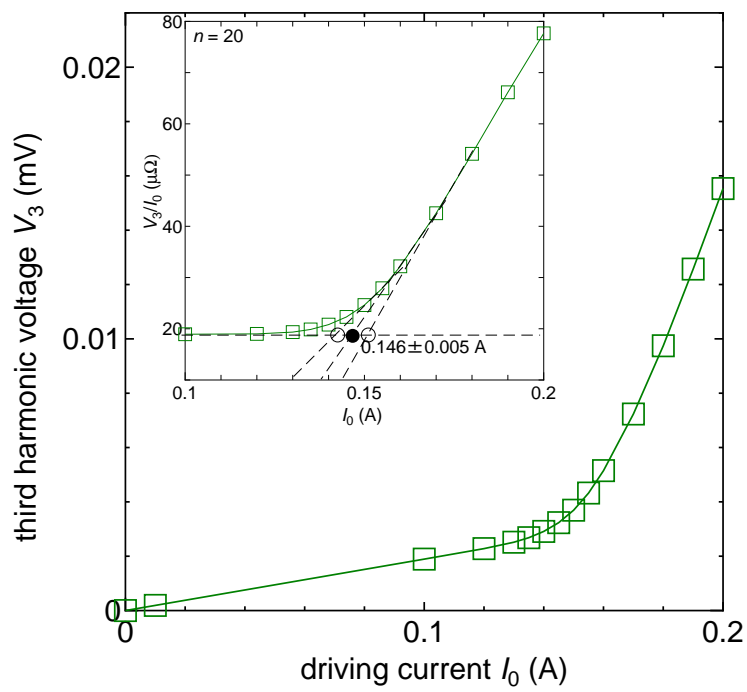


図 3.5:  $n = 20$  の場合の  $V_3$ - $I_0$  特性

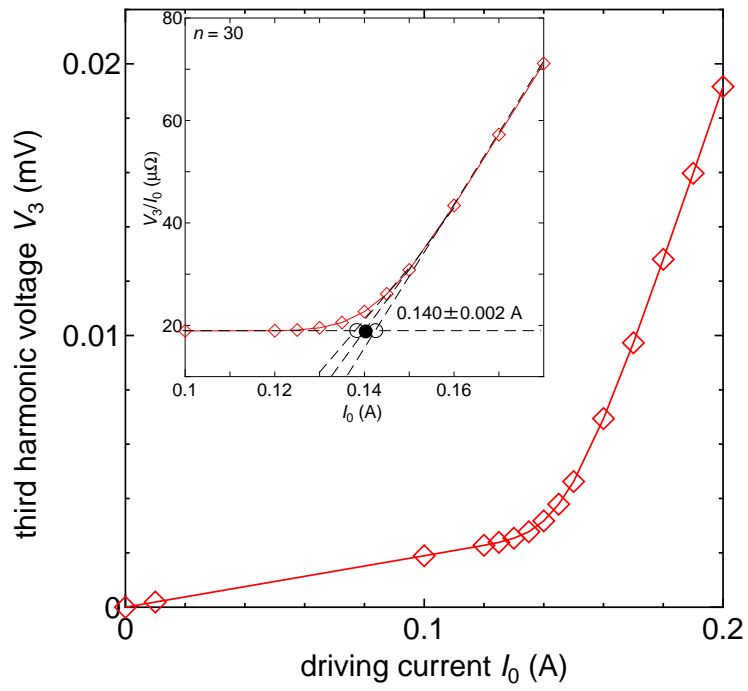


図 3.6:  $n = 30$  の場合の  $V_3$ - $I_0$  特性

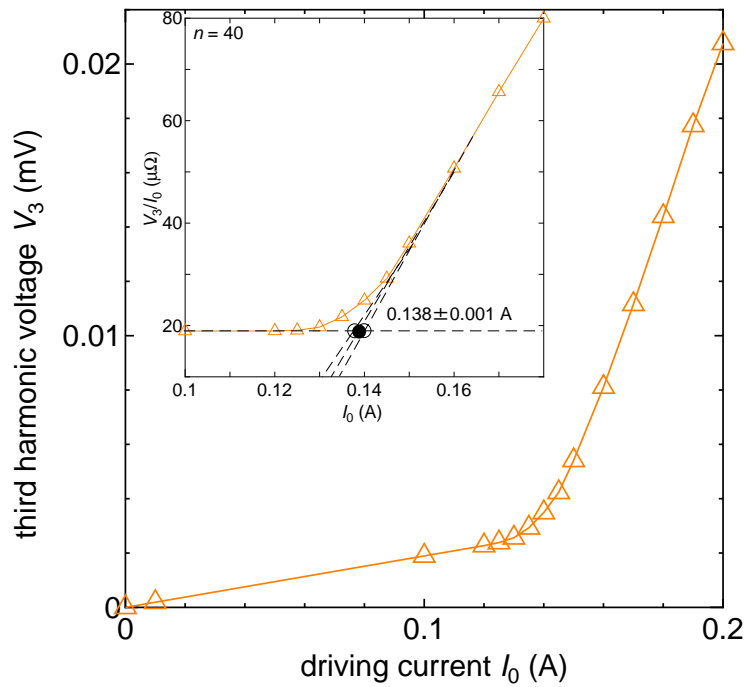


図 3.7:  $n = 40$  の場合の  $V_3$ - $I_0$  特性

### 3.3 利用可能な $n$ 値の検証

3.2節において、計算によって得られた  $J_c$  が基準的な  $J_c$  に対して誤差  $\pm 5.0\%$  となるのは  $n$  値が 30 以上であることが明らかとなった。しかしながら  $n$  値が 30 のときの誤差は  $-0.39 \sim +2.7\%$  と  $\pm 5.0\%$  に対してまだ余裕があるため、 $n$  値が 20 ~ 30 の範囲を細かく解析することで、第三高調波電圧誘導法を適用可能な  $n$  値を検証すべきである。

図 3.8 は  $n$  値が 25 の場合の  $V_3-I_0$  特性である。このとき  $I_{th}$  は  $0.144 \pm 0.003$  A で、求まる  $J_c$  は  $2.71 \pm 0.050$  A/m<sup>2</sup> であり、基準的な  $J_c$  に対して  $+2.3 \sim +6.2\%$  の誤差となっている。この時点で誤差が  $\pm 5.0\%$  以内に収束していないため、 $n$  値が 21 ~ 24 の範囲の解析は省略した。よって  $n$  値が 26, 27, 28 の場合の  $V_3-I_0$  特性を図 3.9 ~ 3.11 に示し、off-set 法により求めた  $I_{th}$  および  $J_c$  と誤差を表 3.2 に示す。

表 3.2:  $n$  値が 26, 27, 28 の場合の  $I_{th}$  および  $J_c$  と誤差

$n$ 値	$I_{th}$ (A)	$J_c$ (A/m <sup>2</sup> )	基準的な $J_c$ との誤差 (%)
26	$0.143 \pm 0.003$	$(2.69 \pm 0.050) \times 10^{10}$	$+1.5 \sim +5.4$
27	$0.142 \pm 0.003$	$(2.67 \pm 0.060) \times 10^{10}$	$+0.39 \sim +5.0$
28	$0.142 \pm 0.002$	$(2.67 \pm 0.040) \times 10^{10}$	$+1.2 \sim +4.2$

表 3.2 より、 $n$  値が 27 の時に  $J_c$  の誤差が  $\pm 5.0\%$  以内に収まっていることが分かる。以上の結果から、第三高調波電圧誘導法において誤差  $\pm 5.0\%$  以内の  $J_c$  を計算可能な  $n$  値は 27 以上であると言える。

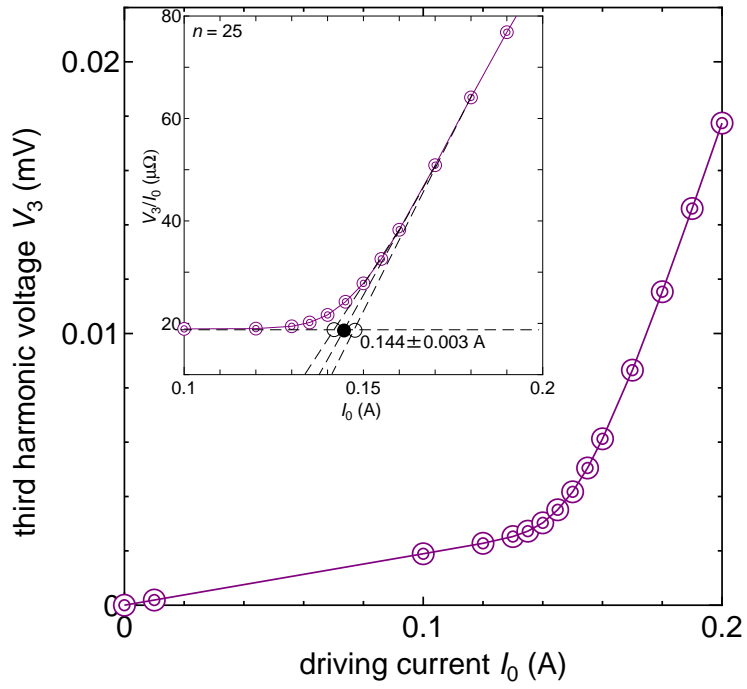


図 3.8:  $n = 25$  の場合の  $V_3$ - $I_0$  特性

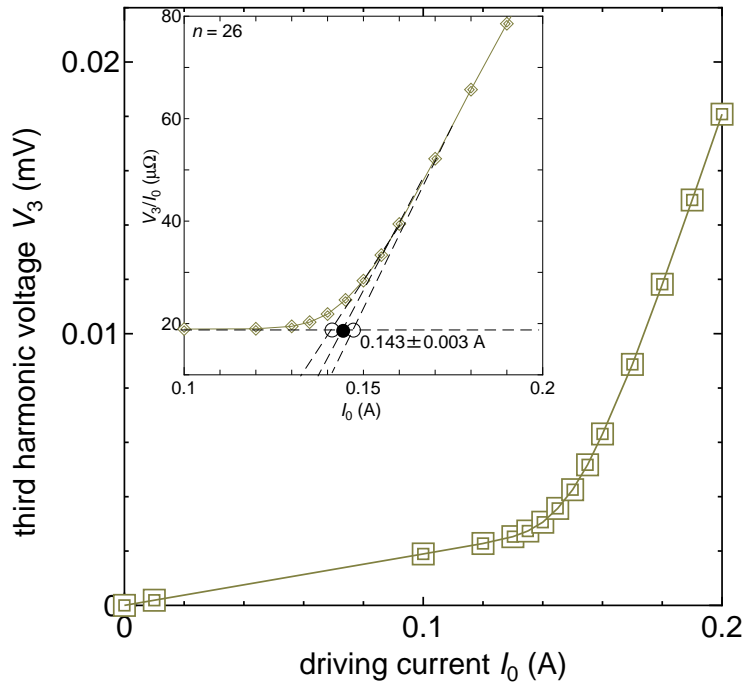


図 3.9:  $n = 26$  の場合の  $V_3$ - $I_0$  特性

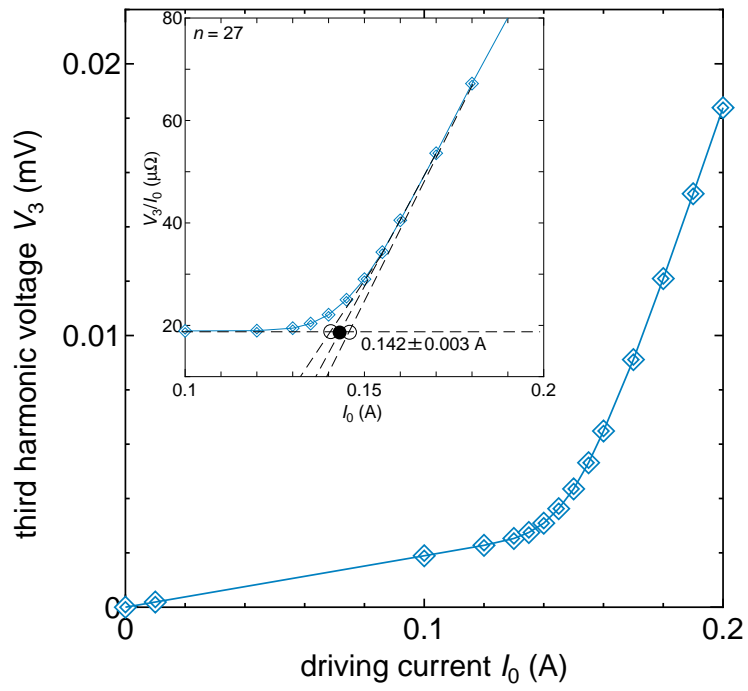


図 3.10:  $n = 27$  の場合の  $V_3$ - $I_0$  特性

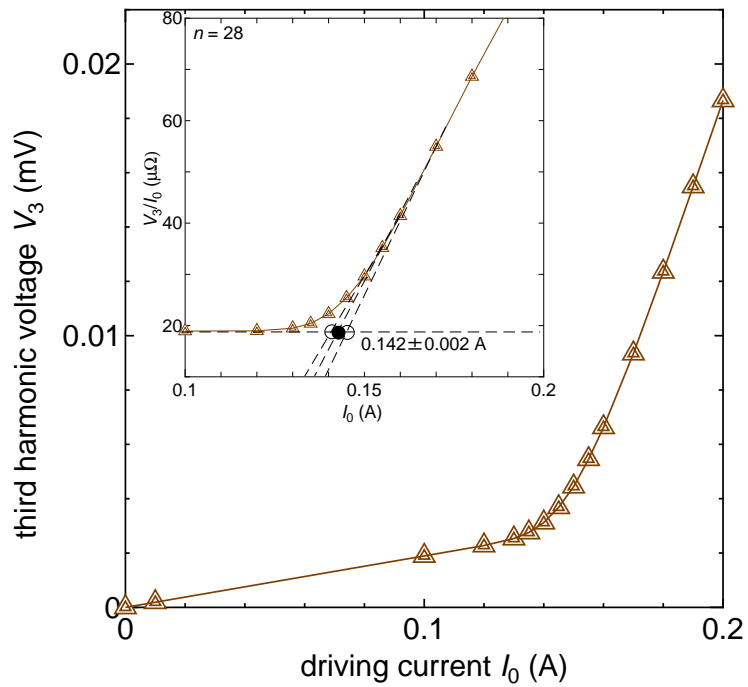


図 3.11:  $n = 28$  の場合の  $V_3$ - $I_0$  特性

### 3.4 超伝導体内部の磁束密度・電流密度の分布

次に超伝導薄膜内部の磁束密度  $B$  および電流密度  $J$  の分布を調べ、数値解析結果に off-set 法を用いて求めた  $I_{th}$  との比較を行った。以下  $n$  値は 30 とし、発生する磁場が最も強くなる  $\omega t = 2\pi$  のときの  $B$  および  $J$  を用いた。

図 3.12(a) および (b) はそれぞれ、 $I_{th}$  よりも小さな  $I_0 = 0.100$  A、 $I_0 = 0.120$  A をコイルに通電したときの  $B$  および  $J$  の分布で、横軸に超伝導薄膜の厚さをとっている。図 3.12(a) では磁束が超伝導薄膜の裏側まで突き抜けておらず、裏側付近では電流がほとんど流れていないことが読み取れる。一方図 3.12(b) では磁束が超伝導薄膜の裏側まで突き抜けており、超伝導薄膜内で一様に遮蔽電流が流れていることが分かる。

図 3.13 はそれぞれ、超伝導薄膜内部の  $J$  の分布が  $J_c$  と一致する直前 (a), (b)、ほぼ一致するとき (c)、および直後 (e), (f) を示している。図 3.13 より、 $J$  は超伝導薄膜内に均一に分布したまま  $I_0$  の増加と共に徐々に増加していることが分かる。また、off-set 法により求めた  $I_{th} = 0.140 \pm 0.002$  A よりも低い  $I_0 = 0.129$  A において  $J = J_c$  となり、超伝導薄膜が臨界状態となっていることが分かる。

他の  $n$  値についても同様に、超伝導薄膜内部の  $J$  の分布が  $J_c$  と一致する様子を図 3.14 にまとめた。その結果、いずれの  $n$  値の場合についても  $J = J_c$  となるのは  $I_0 = 0.129$  A あるいは  $0.130$  A のときであり、 $n$  値による大きな違いは見られなかった。これは off-set 法によって求めた  $I_{th}$  が、 $n$  値が小さいほど大きくなるという計算結果とは異なる結果となった。この  $I_0 = 0.129$  A および  $I_0 = 0.130$  A から求まる  $J_c$  はそれぞれ  $2.44 \times 10^{10}$  A/m<sup>2</sup>、 $2.43 \times 10^{10}$  A/m<sup>2</sup> となる。これは基準的な  $J_c$  から  $+6.2 \sim +6.5\%$  の差となっている。これは  $\pm 5.0\%$  に収まっていないことから、超伝導薄膜が臨界状態に達した時の  $I_0$  から求めた  $J_c$  には、無視できない量の誤差を含むものと考えられる。また、 $J$  の分布から見た  $J_c$  と比較して off-set 法によって求めた  $J_c$  の値は大きくなったが、これは  $n$  値モデルによるものと考えられる。いずれの  $n$  値においても、 $J$  の分布が  $J_c$  と一致する  $I_0 = 0.129$  A あるいは  $I_0 = 0.130$  A 付近で  $V_3$  が立ち上がり始めていることが、図 3.4 ~ 3.7 から分かる。つまり  $J$  の分布から見た  $J_c$  は  $V_3$  が立ち上がる時の  $I_{th}$  から求まる。これに対して off-set 法により求まる  $J_c$  は  $V_3$  の傾きが変化している時の  $I_{th}$  から求まる。 $V_3$  の傾きの変化は  $n$  値が大きくなるほど急激になるため、 $n$  値の増加に伴って分布から見た  $J_c$  と off-set 法による  $J_c$  の差は小さくなるも



のと考えられる。

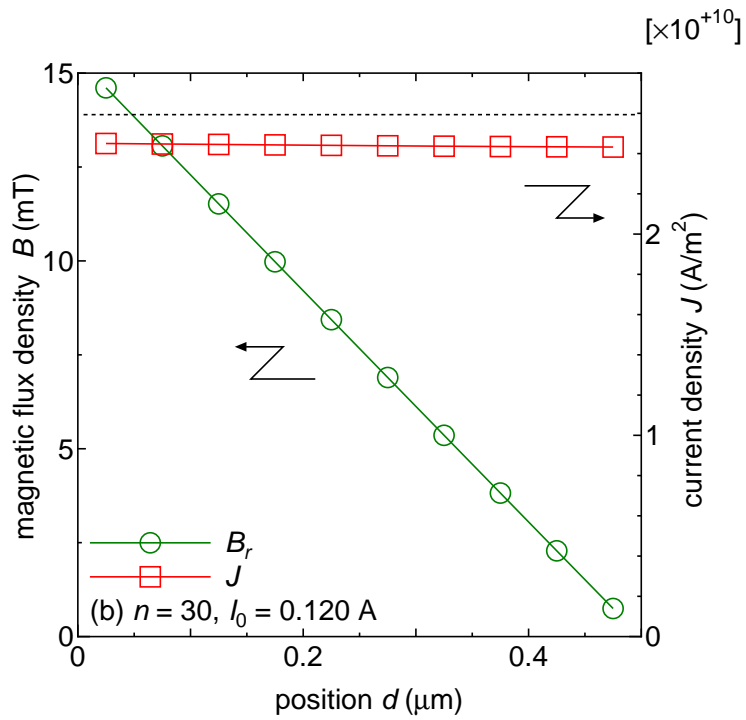
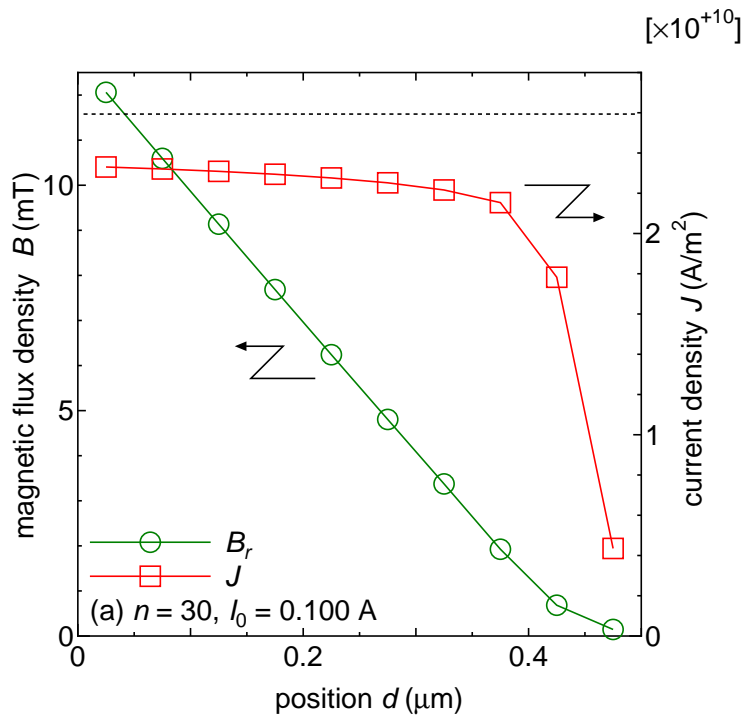


図 3.12:  $I_0 < I_{th}$  の場合の  $B$  および  $J$  の分布

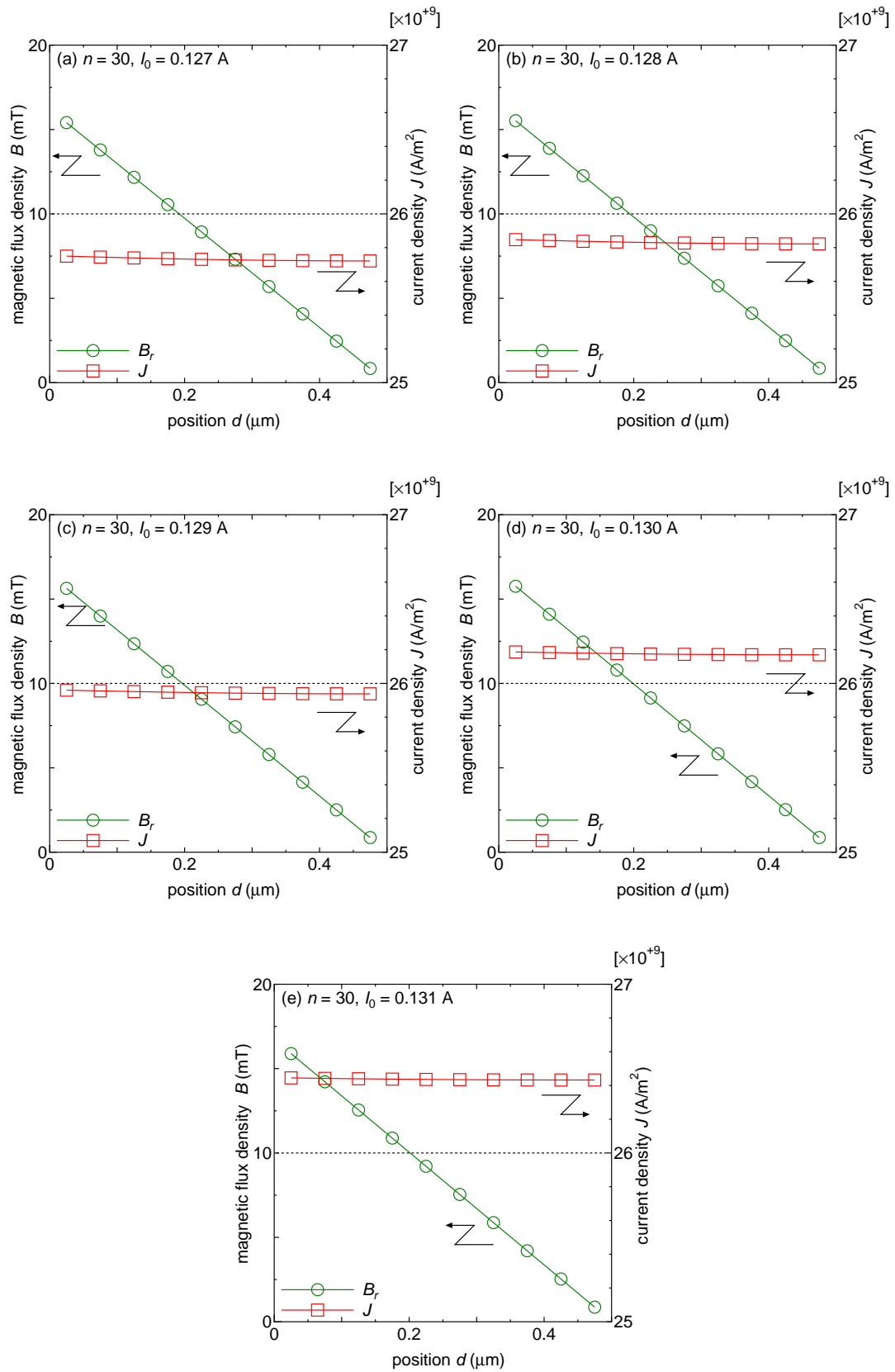


図 3.13:  $J = J_c$  周辺の場合の  $B$  および  $J$  の分布

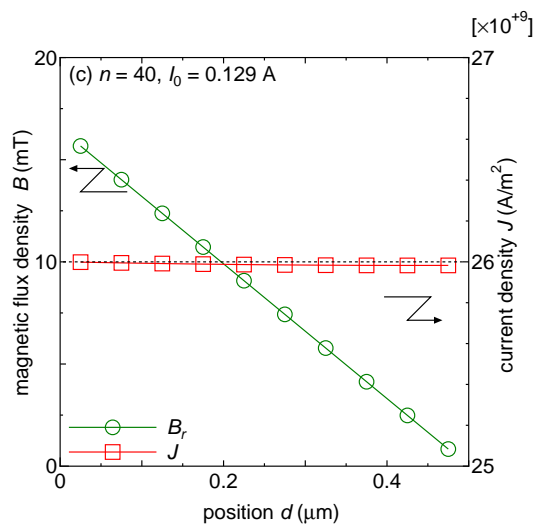
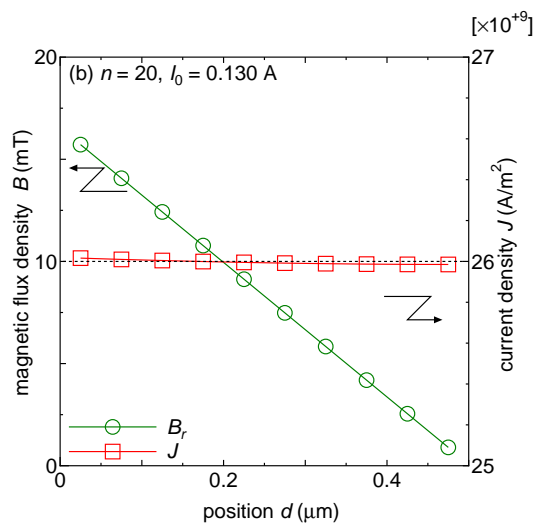
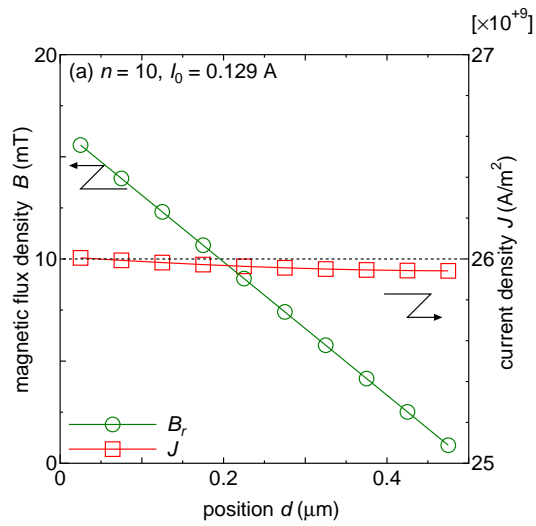


図 3.14: 各  $n$  値について  $J = J_c$  のときの  $B$  および  $J$  の分布

# Chapter 4

## 結論

本研究では第三高調波電圧誘導法により求めた  $V_3-I_0$  特性から臨界電流密度  $J_c$  を評価する方法として、四端子法の測定でよく使われている off-set 法に着目した。有限要素法を用いた数値解析により求めた  $V_3/I_0-I_0$  特性から off-set 法によって閾値電流  $I_{th}$  を求め、得られた  $J_c$  と設定で与えた  $J_c$  の比較を行った。また、超伝導薄膜内部の磁束密度  $B$  および電流密度  $J$  の分布を有限要素法を用いた数値解析により求め、off-set 法により得られた  $I_{th}$  との比較を行った。得られた結果及び知見を以下にまとめる。

- $V_3-I_0$  曲線および  $V_3/I_0-I_0$  曲線は  $n$  値が小さくなるほど緩やかに立ち上がるため、接線を引く場所によって得られる  $I_{th}$  のばらつきが大きくなった。
- $V_3/I_0-I_0$  曲線から off-set 法を用いて求めた  $I_{th}$  から計算される  $J_c$  は、 $n$  値が大きくなるにしたがって設定で与えた真の  $J_c$  に近くなった。
- 接線の引き方による誤差を含め、off-set 法により求まる  $J_c$  が設定で与えた  $J_c$  の誤差  $\pm 5.0\%$  以内に収まるのは、 $n$  値が 27 以上の場合である。
- 超伝導薄膜内部の  $J$  は off-set 法により求めた  $I_{th}$  よりも低い  $I_0$  において  $J_c$  と一致している。この時の  $I_0$  から計算によって求まる  $J_c$  は設定で与えた真の  $J_c$  と比較して 6.2 ~ 6.5% の誤差となり、基準となる  $\pm 5.0\%$  以内に収まっていない。よって超伝導薄膜が臨界状態となる時の  $I_0$  を  $I_{th}$  と定義するのは妥当ではないと考えられる。

# 謝辞

本研究を行なうにあたり、多大なる御指導、助言を頂いた松下照男教授に深く感謝いたします。また、様々な助言や指導、ご協力をして頂いた小田部荘司准教授、木内勝助教に深く感謝いたします。最後に、公私共々お世話になりました松下研究室、小田部研究室の皆様にも深く感謝いたします。

# Bibliography

- [1] J. H. Claassen, M. E. Reeves, R. J. Soulen Jr., *Rev. Sci. Instrum.* 62 (1991) 996.
- [2] Y. Mawatari, H. Yamasaki, Y. Nakagawa, *Appl. Phys. Lett.* 81 (2002) 2424.
- [3] S. Honjo, H. Ishii, Y. Sato, H. Hashimoto, T. Yamada, K. Tani, T. *IEE Japan*, Vol. 120-B, No.11, (2000)