

# 最急降下法を用いた超伝導体の 電界-電流密度特性評価の検討

小田部研究室

増田嘉道

平成 26 年 2 月 13 日

電子情報工学科

# 目次

<b>第1章 序論</b> .....	<b>1</b>
1.1 はじめに .....	1
1.2 磁束ピンニング .....	2
1.3 磁束クリープ・フローモデル.....	3
1.3.1 磁束クリープ.....	3
1.3.2 磁束フロー .....	5
1.3.3 ピン・ポテンシャル .....	7
1.3.4 磁束クリープ・フローモデル.....	9
1.4 不可逆磁界.....	10
1.5 最急降下法.....	11
1.6 シンプソン法 .....	12
1.7 本研究の目的 .....	13
<b>第2章 計算手法</b> .....	<b>14</b>
2.1 計算方法 .....	14
2.2 計算環境 .....	16
2.3 解析に用いるモデルデータ .....	16
<b>第3章 実験結果</b> .....	<b>18</b>
3.1 計算精度 .....	18
3.1.1 仮想データ .....	18
3.1.2 実験データ .....	20
3.2 計算時間 .....	22
3.3 距離-計算回数特性.....	23

<b>第4章 考察</b> .....	<b>24</b>
4.1 計算精度について .....	24
4.2 計算時間について .....	25
4.3 距離-計算回数特性について .....	25
<b>第5章 結論</b> .....	<b>26</b>
5.1 結論 .....	26
5.2 今後の課題.....	26
<b>謝辞</b> .....	<b>27</b>
<b>参考文献</b> .....	<b>28</b>

# 表目次

2.1 初期値の範囲 .....	14
2.2 計算環境 .....	16
2.3 実験データのピンニングパラメータ .....	16
2.4 実験時のパラメータ .....	16
3.1 計算時間 .....	23
4.1 仮想データを対象とした場合に算出されたピンニングパラメータ .....	24
4.2 距離の最小値・平均値・最大値 .....	24
4.3 プログラム 1 回あたりの平均計算回数と平均計算時間 .....	25

# 目次

1.1 磁束クリーブにおける磁束バンドルの変位とエネルギーの関係 .....	3
1.2 磁束フローにおける磁束バンドルの変位とエネルギーの関係 .....	6
1.3 磁束線と平行方向の相関距離と超伝導層厚による磁束バンドルの体積 .....	8
1.4 不可逆曲線 .....	10
1.5 最急降下法 .....	11
1.6 シンプソン法 .....	12
2.1 フローチャート .....	13
2.2 仮想データ .....	17
2.3 実験データ .....	17
3.1 仮想データを対象とした場合のパラメータの分散 .....	18
3.2 仮想データを対象とした場合の最良解 .....	19
3.1 仮想データを対象とした場合の最悪解 .....	19
3.4 実験データを対象とした場合のパラメータの分散 .....	20
3.5 実験データを対象とした場合の最良解 .....	21
3.6 実験データを対象とした場合の最悪解 .....	21
3.7 仮想データを対象とした場合の計算時間の分布 .....	22
3.8 実験データを対象とした場合の計算時間の分布 .....	22
3.9 計算回数と距離の関係 .....	23

# 第 1 章

## 序論

### 1.1 はじめに

1908年にオランダの Leiden 大学の Kamerlingh Onnes が世界で初めてヘリウムの液化に成功し、1911年に液体ヘリウムを用いて水銀の電気抵抗を測定する過程において、4.2 K 以下において電気抵抗が測定不能なほどに小さくなることを発見した。さらに、1933年には Fritz Walther Meissner によって超伝導体の完全反磁性(Meissner 効果)が発見された。この 2つの現象を超伝導現象と言い、一定条件下で超伝導現象を示す物質を超伝導体と言う。超伝導体は電気抵抗が 0 であることから大きな電流を損失なく通電することができると期待されていた。しかし、超伝導体はある磁界を超えると超伝導状態を維持できなくなることがわかった。超伝導状態から常伝導状態に代わる温度を臨界温度 $T_c$ 、磁界を臨界磁界 $B_c$ と言う。超伝導状態になる条件はあるが、電気抵抗が 0 となることは非常に有用性が高いため、現在も研究は続けられている。

その後も超伝導現象の発現については不透明なままだった。しかし、1957年に John Bardeen, Leon Neil Cooper, John Robert Schrieffer によって提唱された BCS 理論によって、超伝導現象の発現のメカニズムが明らかになっていった。BCS 理論によると、 $T_c$ は 30 K を超えないだろうと予測されていたが、1986年に Johannes Georg Bednorz と Karl Alex Müller によって臨界温度が 30 K を超える酸化物超伝導体が発見された。その 1年後には $T_c$ が液体窒素の常圧下での温度(77.3 K)を超える $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ や $\text{Bi}_2\text{Cr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+\delta}$ ( $\delta$ は微量)などの酸化物超伝導体が発見された。これらは銅酸化物超伝導体または高温超伝導体と呼ばれ、液体ヘリウムよりも安価な液体窒素中で超伝導状態となることから応用が期待されている。

また、2001年の青山学院大学の秋光純教授らによる $\text{MgB}_2$ の発見、2008年の東京工業大学の細野秀雄教授らによる鉄ヒ素系超伝導体の発見など、現在に至るまで盛んに超伝導体の発見が試みられている。

## 1.2 磁束ピンニング

超伝導体は磁気的な振る舞いによって第一種超伝導体と第二種超伝導体の2種類に分類される。第一種超伝導体は超伝導状態において常に完全反磁性を示すが、 $B_c$ を超えたところで超伝導状態が消失する。一方で、第二種超伝導体は下部臨界磁場 $B_{c1}$ までは第一種超伝導体と同様に完全反磁性を示すが、それ以上の磁界を加えていくと部分的に超伝導状態が常伝導状態となる混合状態となり、上部臨界磁場 $B_{c2}$ を超えるとすべての超伝導状態が消失する。

第一種超伝導体の $B_c$ と第二種超伝導体の $B_{c1}$ は $B_{c2}$ より非常に小さい。そのため、工業的応用においては $B_{c1}$ と $B_{c2}$ の間である混合状態で用いられる。混合状態では、常伝導状態の部分に磁束線が侵入する。この時、侵入した磁束線は電流を流すと Lorentz 力 $\mathbf{F}_L$ を受ける。この $\mathbf{F}_L$ は超伝導体を流れる電流密度 $\mathbf{J}$ と侵入した磁束密度 $\mathbf{B}$ を用いて、 $\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ と表すことができる。ここで、 $\mathbf{F}_L$ を受けた磁束線が速度 $\mathbf{v}$ で動いたとすると、電磁誘導によって $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ の電界が生じる。しかし、実際には磁束線の運動を妨げるように、Lorentz 力とは反対向きの同じ大きさの力が働く。この力をピン力といい、ピン力が働く作用のことを磁束ピンニングと言い、常伝導析出物や結晶粒界などのピンニングに作用する様々な欠陥(超伝導状態にならない部分)をピンニングセンターと言う。また、単位体積あたりのピン力を $F_p$ という。 $JB = |\mathbf{J} \times \mathbf{B}|$ とすると、 $JB$ が $F_p$ の最大値を超えなければ電界が発生しない。このことから、電気抵抗0で流すことのできる最大の電流密度 $J_c$ は $J_c = F_p/B$ と表すことができ、 $J_c$ を臨界電流密度という。 $J_c$ は超伝導体の応用において $T_c$ と $B_{c2}$ に並んで重要なパラメータである。 $F_p$ の向上によって $J_c$ は上昇し、 $F_p$ は後天的に上昇させることができるパラメータである。ピンニングセンターは超伝導体の不均一さ、つまり欠陥によるものであり、人工的に加えてもピンニングセンターとして働く。ピンニングセンターを人工的に導入することでより大きな $J_c$ を得ることができるよう研究がなされている。

## 1.3 磁束クリープ・フローモデル

### 1.3.1 磁束クリープ

磁束クリープとは、ピンニングセンターに捕まっている磁束線が熱振動によって確率的にピンニングセンターから外れてしまう磁束線の運動である。この運動の影響が顕著に現れるのが、直流磁界を加えた時に発生する超伝導電流の緩和である。理論的には外部環境が変化しない限り超伝導電流は減衰しないと考えられるが、実際に超伝導電流を長時間測定し続けると減衰している。つまり、外部環境が一定であるにもかかわらず、超伝導電流が時間とともに減衰しており、ピンニングに基づく超伝導電流が真の永久電流ではないことを示している。また、高温になると熱運動が盛んになるため超伝導電流の減衰が激しくなり<sup>[1]</sup>、高温超伝導体の場合には $J$ が0となることもある。

超伝導体内には磁束線が量子化して侵入するため、磁束クリープの際には磁束線が束になって移動すると考えられている。その磁束線の束を磁束バンドルという。電流が流れている状態における一つの磁束バンドルについて考える。この時の磁束バンドルの変位によるエネルギーの変化は図 1.1 のように示すことができる。図が右下がりとなっているのは Lorentz 力を考慮しているためである。磁束バンドルがピン止めされた状態から外れるには、エネルギーバリアの $U$ や $U'$ を超えなければならない。熱振動がなければ図の状態安定である。

磁束バンドルは温度 $T$ の下では熱エネルギー $k_B T$  ( $k_B$ はボルツマン定数)により、ある確率でエネルギーバリア $U$ を超える。この確率は Arrhenius の式より  $\exp(-U/k_B T)$  で与えられる。超伝導体に侵入した磁束線は格子間隔 $a_f$ の三角格子を組むことから、磁束バンドルは $a_f$ 移動することによって次の準安定状態になる

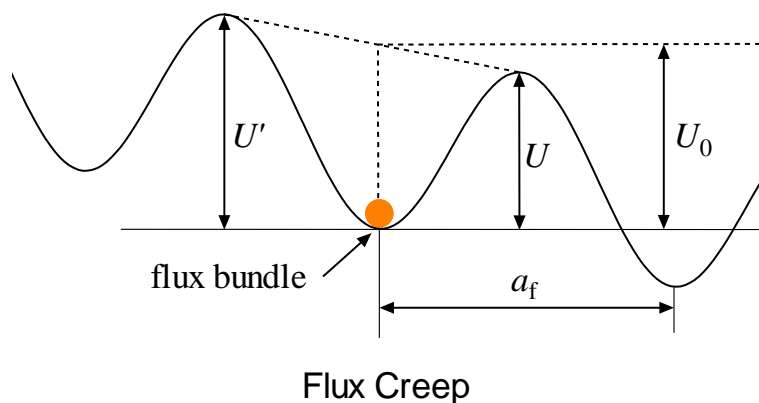


図 1.1 : 磁束クリープにおける磁束バンドルの変位とエネルギーの関係



と予想される。したがって、磁束バンドルの熱振動数 $v_0$ とすると、この時の Lorentz 力方向の平均の磁束線の移動速度 $v_+$ は

$$v_+ = a_f v_0 \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) \quad (1.1)$$

となり、Lorentz 力と反対方向への磁束バンドルの平均の移動速度を考えると、全体での移動速度 $v$ は

$$v = a_f v_0 \left[ \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{U'}{k_B T}\right) \right] \quad (1.2)$$

となる。また、 $v_0$ と $a_f$ はそれぞれ

$$v_0 = \frac{\zeta \rho_f J_{c0}}{2\pi a_f B} \quad (1.3)$$

$$a_f = \left(\frac{2\phi_0}{\sqrt{3}B}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

で与えられる<sup>[1]</sup>。ここで、 $\zeta$ はピンニングセンターの形状に依存する定数であり、点状のピンニングセンターの場合は $\zeta \cong 2\pi$ <sup>[2]</sup>、ピンニングセンターが $a_f$ 以上の非超伝導粒子の場合は $\zeta = 4$ であることが知られている<sup>[3]</sup>。また、 $\rho_f$ はフロー比抵抗、 $\phi_0$ は磁束量子である。さらに、磁束クリーブがないと仮定した場合の仮想的な臨界電流密度 $J_{c0}$ は経験的に

$$J_{c0} = A \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{TCN_T}\right)^m B^{\gamma-1} \left(1 - \frac{B}{B_{c2}}\right)^{TCN_B} \quad (1.5)$$

と表現できる。ここで $A$ はピンの強さ、 $m$ と $\gamma$ はピンニングパラメータと呼ばれるパラメータ、 $TCN_T$ と $TCN_B$ はスケール則内での次数である。例として、銅酸化物超伝導体において、 $TCN_T = 2$ 、 $TCN_B = 2$ である。したがって、 $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ の関係より、生じる電界の大きさは(1.1)式より

$$E = B a_f v_0 \left[ \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{U'}{k_B T}\right) \right] \quad (1.6)$$

となる。すなわち、磁束クリーブにより超伝導体に(1.6)式の電界が発生している。

磁束バンドルの中心位置 $x$ に対するエネルギー変化は、一般的に図 1.1 のような正弦洗濯板状ポテンシャルになり、

$$F(x) = \frac{U_0}{2} \sin(kx) - fx \quad (1.7)$$

で与えられる。ここで $U_0/2$ はポテンシャルの振幅、 $k = 2\pi/a_f$ は波数、 $f = JBv$ は磁束バンドルに働く Lorentz 力である。磁束バンドルが平衡位置にある時を

$x = -x_0$ とおくと、 $x = x_0$ のときエネルギーは極大となる。したがって、それぞれの位置でのエネルギーの変化量は  $0(F'(x) = 0)$ となる。これより

$$x_0 = \frac{a_f}{2\pi} \cos^{-1} \left( \frac{fa_f}{U_0\pi} \right) \quad (1.8)$$

が求まる。また、 $U = F(x_0) - F(-x_0)$ より

$$\begin{aligned} U &= U_0 \sin \left[ \cos^{-1} \left( \frac{fa_f}{U_0\pi} \right) \right] - \frac{fa_f}{\pi} \cos^{-1} \left( \frac{fa_f}{U_0\pi} \right) \\ &= U_0 \left[ \left\{ 1 - \left( \frac{2f}{U_0k} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{2f}{U_0k} \cos^{-1} \left( \frac{2f}{U_0k} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.9)$$

と表される。但し、 $\sin(\cos^{-1} x) = \sqrt{1-x^2}$ を用いた。仮に熱振動がなければ、 $U = 0$ の理想的な臨界状態となると予想できる。そのためには  $2f/U_0k = 2J_{c0}BV/U_0k = 1$ となることから

$$\frac{2f}{U_0k} = \frac{J}{J_{c0}} = j \quad (1.10)$$

となる。これより(1.9)式は

$$U(j) = U_0 \left[ (1-j^2)^{\frac{1}{2}} - j \cos^{-1}(j) \right] \quad (1.11)$$

となる。また、 $k = 2\pi/a_f$ 及び(1.10)式より

$$U'(j) \cong U + fa_f = U + \pi U_0 j \quad (1.12)$$

となる。この関係を用いて磁束クリープにより発生する電界の式である(1.6)式を整理すると

$$E = Ba_f v_0 \exp \left( -\frac{U(j)}{k_B T} \right) \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\pi U_0 j}{k_B T} \right) \right] \quad (1.13)$$

となり、磁束クリープにおける電界が求まる。

### 1.3.2 磁束フロー

磁束フローとは、磁束クリープ状態から更に $J_{c0}$ を超えた大きな電流を流した時、Lorentz力がピン力の最大値を超え、磁束線が連続的に運動している状態のことを指す。この時、図 1.2 に示すようにポテンシャルは変位に対して単調減少となる。

電界を磁束フローについてのみ評価するために、磁束クリープの影響のない状態を仮定する。超伝導体に電流が流れ、外部磁界が印加されている時の単位体積当たりの磁束線に働く Lorentz 力は  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  で与えられる。また、これまでに

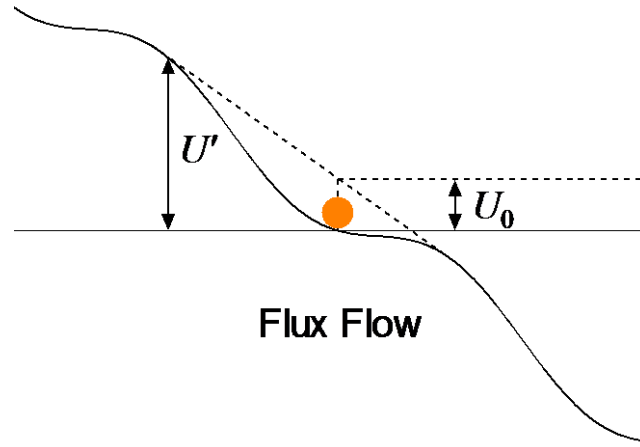


図 1.2 : 磁束フローにおける磁束バンドルの変位とエネルギーの関係

述べたように、磁束線は Lorentz 力と逆向きにピンニング力を受ける。Lorentz 力の方向の単位ベクトルを  $\delta = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$  とすると、この釣り合いの式は

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \delta F_p = 0 \quad (1.14)$$

となる。この時の電流密度は  $J_{c0}$  となることから、 $|\mathbf{J}| = F_{p0}/B = J_{c0}$  の関係が得られる。ここで、磁束フローの影響を考慮すると粘性力が働くため、

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \delta F_p - \frac{B}{\phi_0} \eta \mathbf{v} = 0 \quad (1.15)$$

となる。ここで、 $\eta$  は粘性係数である。さらに、 $J_{c0} = F_p/B$  及び  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$  について解くと、

$$\mathbf{J} = J_{c0} + \frac{\mathbf{E}}{\rho_f} \quad (1.16)$$

となる。ここで、 $\rho_f = B\phi_0/\eta$  はフロー比抵抗である。また、 $\rho_f$  は常伝導状態における抵抗密度  $\rho_0$  を用いて、 $\rho_f = \rho_0 T B / T_c B_{c2}$  で求まる。(1.16) 式を  $\mathbf{E}$  について整理すると、

$$\mathbf{E} = \rho_f (\mathbf{J} - J_{c0}) \quad (1.17)$$

となり、磁束フローにより発生する電界が求まる。

### 1.3.3 ピン・ポテンシャル

ピンニングセンターの持つポテンシャルは磁束クリーブによる超伝導電流の緩和や不可逆曲線を決定する上で重要である。そのピン・ポテンシャルエネルギー $U_0$ は、単位体積あたりの平均化したピン・ポテンシャル $\widehat{U}_0$ と磁束バンドルの体積 $V$ の積で表され、

$$U_0 = \widehat{U}_0 V \quad (1.18)$$

となる。この $\widehat{U}_0$ は Labusch パラメータ $\alpha_L$ と相互作用距離 $d_i$ を用いて

$$\widehat{U}_0 = \frac{1}{2} \alpha_L d_i^2 \quad (1.19)$$

と表せることから、ピン力密度 $F_p$ と

$$\begin{aligned} F_p &= J_{c0} B \\ &= \alpha_L d_i \end{aligned} \quad (1.20)$$

の関係が得られる。ここで、 $d_i$ がピンの形状により決定する $\zeta$ 、 $a_f$ と

$$d_i = \frac{a_f}{\zeta} \quad (1.21)$$

の関係が有ることから、(1.19)式を用いて

$$U_0 = \frac{1}{2\zeta} J_{c0} B a_f V \quad (1.22)$$

と表される<sup>[4]</sup>。したがって(1.22)式より $U_0$ の値の決定にはピン力の強さだけではなく、磁束バンドルの体積が重要であることがわかる。

磁束バンドルはある領域内で秩序が保たれた磁束線の集団であり、集団と一緒に運動する。この秩序は単純には磁束格子のピンニング相互作用で与えられ、磁束バンドルのサイズはピンニング相関距離によって与えられる。磁束線と平行(縦)方向及び垂直(横)方向の相関距離をそれぞれ $L$ 、 $R$ とすると、これらによって磁束バンドルの体積が決定される。また、磁束バンドルの体積を求めることで、(1.22)式より理論的な $U_0$ の値を求めることができる。この磁束バンドルの体積を模式的に表した図を図 1.3 に示す。 $R$ は磁束格子間距離 $a_f$ かその数倍であると考えられており、

$$R = g a_f \quad (1.23)$$

で表す。ここで、 $g^2$ は磁束バンドル内の磁束線数である。この値は熱力学的な原理から磁束クリーブ下での $J_c$ が最大となるように決定すると考えられ、

$$g^2 = g_e^2 \left[ \frac{5k_B T}{2U_e} \log \left( \frac{B a_f v_0}{E_c} \right) \right] \quad (1.24)$$

が得られる<sup>[5]</sup>。ここで、 $g_e^2$ は完全格子を組んだ際の $g^2$ の値、 $U_e$ は $g^2 = g_e^2$ の時の $U_0$ の値である。また、 $g_e^2$ は

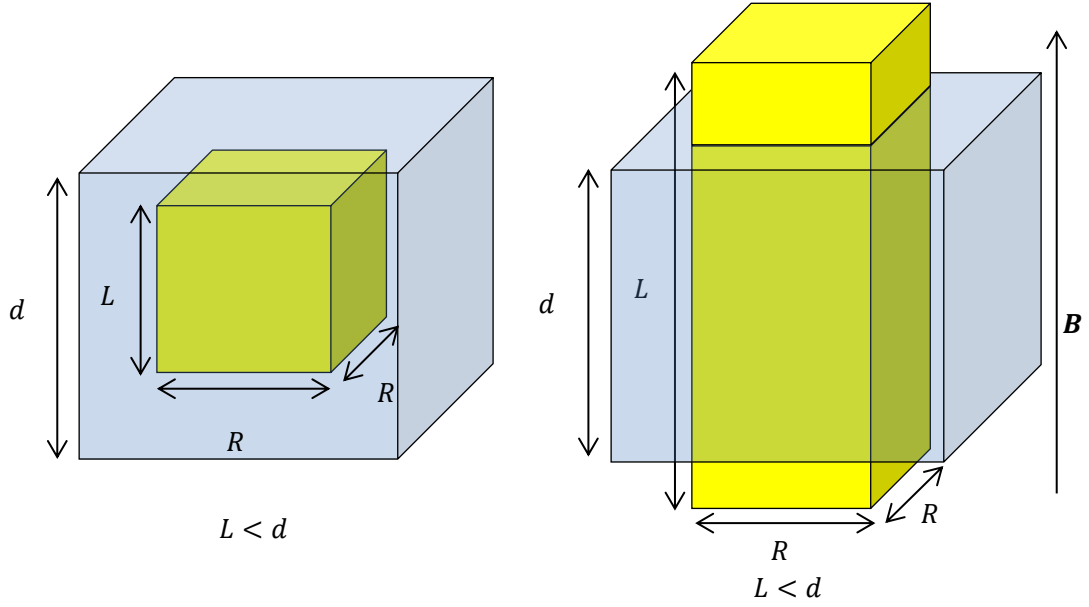


図 1.3 : 磁束線と平行方向の相関距離と超伝導層厚の関係による磁束バンドルの体積

$$g_e^2 = \frac{C_{66}^0}{2\pi J_{c0} B a_f} \quad (1.25)$$

で与えられる<sup>5)</sup>。この $C_{66}^0$ は完全格子の剪断定数であり、

$$C_{66}^0 = \frac{B_c^2 B}{4\mu B_{c2}} \left(1 - \frac{B}{B_{c2}}\right) \quad (1.26)$$

である。ここで、 $B_c$ は熱力学的臨界磁場である。

一方、 $L$ は弾性理論より

$$L = \left(\frac{C_{44}}{\alpha_L}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{B a_f}{\zeta \mu_0 J_{c0}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.27)$$

となる。ここで、 $C_{44} = B^2/\mu_0$ は磁束線の曲げ歪みに対する弾性定数である。この $L$ は超伝導層が薄い場合には、その厚さ $d$ に制限されることがあり、平行方向のバンドルサイズは $L < d$ と $L > d$ の時それぞれ異なる。 $L > d$ の場合、ピンニングは3次元ピンニングとなり、図 1.3 に示すように平行方向のバンドルサイズは $L$ となる。したがって、磁束バンドルの体積は $V = R^2 L$ で与えられ、この時 $U_0$ は

$$U_0 = \frac{0.835 g^2 k_B J_{c0}^{1/2}}{\zeta^{3/2} B^{1/4}} \quad (1.28)$$

となる。また、 $L > d$ の場合は2次元ピンニングとなり、平行方向のバンドルサイズは $d$ となる。したがって、磁束バンドルの体積は $V = R^2 d$ となり、 $U_0$ は

$$U_0 = \frac{4.23g^2k_B J_{c0}d}{\zeta B^{1/2}} \quad (1.29)$$

となる。ここで、 $(1/2)(2/\sqrt{3})^{7/4}(\phi_0^7/\mu_0^2)^{1/4} \approx 0.835k_B$ 、 $(1/2)(2/\sqrt{3})^{3/2}\phi_0^{3/2} \approx 4.23k_B$ の数値的關係を用いた。数値的關係において $k_B$ を用いたのは、 $U_0$ を熱エネルギー $k_B T$ と関連付けるためである。

### 1.3.4 磁束クリープ・フローモデル

これまでに述べたように、超伝導体には磁束クリープと磁束フローそれぞれによって電界が発生する。この2つの電界を考慮して超伝導体が発生する全体の電界を理論付けする計算モデルが磁束クリープ・フローモデルである。1.3.1節、1.3.2節より、磁束クリープによって発生する電界 $E_{cr}$ 、磁束フローによって発生する電界 $E_{ff}$ は $j < 1$ において

$$E_{cr} = Ba_f v_0 \exp\left(-\frac{U(j)}{k_B T}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi U_0 j}{k_B T}\right)\right] \quad (1.30)$$

$$E_{ff} = 0 \quad (1.31)$$

となる。また、 $j > 1$ においては

$$E_{cr} = Ba_f v_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi U_0}{k_B T}\right)\right] \quad (1.32)$$

$$E_{ff} = \rho_f (J - J_{c0}) \quad (1.33)$$

となる。但し、(1.32)式は $E_{cr}$ が残留するためこのような式になると仮定されている。これら2つによって生じる電界 $E'$ を

$$E' = \sqrt{E_{cr}^2 + E_{ff}^2} \quad (1.34)$$

とおく。

一般に酸化物超伝導体は超伝導体内が不均一であるため、ピン力が分布していると考えられる。そこで、(1.5)式の $A$ の分布を表す関数を

$$f(A) = K \exp\left[-\frac{(\log A - \log A_m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.35)$$

で表現する。 $K$ は規格化定数、 $\sigma^2$ はピン力の分散、 $A_m$ はピン力の最頻値を表す。(1.35)式は対数正規分布に基づいている。この $A$ の分布を考慮して発生する電界は

$$E(J) = \int_0^\infty E' f(A) dA \quad (1.36)$$

となる。この(1.36)式を計算することで、理論的な $E$ - $J$ 特性を得られる<sup>[6]</sup>。

## 1.4 不可逆磁界

1.2 節で述べたように第二種超伝導体は第一種超伝導体より高い磁界で超伝導状態を維持することができる。混合状態において上部臨界磁場 $B_{c2}$ まで電気抵抗 0 で流せる電流が存在すると考えられていた。しかし、実際には $B_{c2}$ 付近においてピンニングが有効でなくなり、 $J_c$ も 0 となる。また、ピンニングによる超伝導体の磁化の不可逆性もなくなり、磁化が可逆となる。この $J_c = 0$ と $J_c \neq 0$ の境界の磁界を不可逆磁界 $B_i$ という。また、温度毎の不可逆磁界の値を連ねた曲線を不可逆磁界といい、これを図 1.1 に示す。

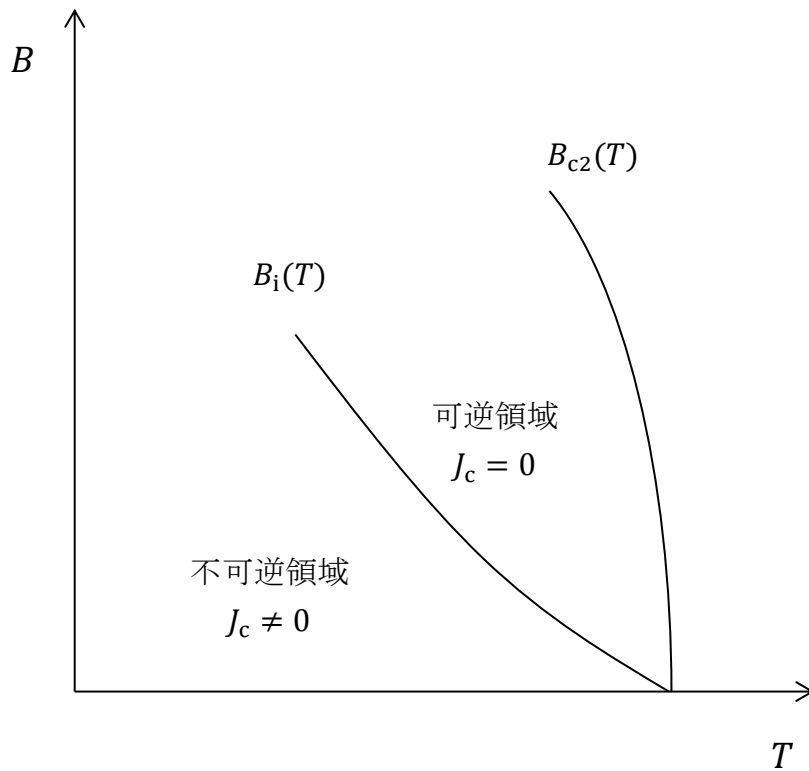


図 1.4 : 不可逆曲線

## 1.5 最急降下法

最急降下法(Steepest descent method)とは、関数の傾きのみから関数の最小値を探索する勾配法のアプローチである。このアプローチは一階微分しか行わないため、勾配法の中では最も単純なアプローチとされているが、傾きのみから最小値を求めるアプローチであるために、局所解(極小値)に陥りやすいという特徴がある。以下にアプローチの流れの例を示す。

1. ランダムに初期注目点を決定
2. 任意の評価関数を用いて各注目点を評価
3. 各変数について偏微分を行う
4. 停止条件を満たさない場合は注目点を更新し 2 に戻る
5. 最終的に評価が最も高いものを解とする。

但し、注目点の変数ベクトル  $\mathbf{x}^{(k)}$  を更新する際には

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \alpha \times \text{grad}(d) \quad (1.37)$$

とする。ここで、 $\alpha$  は 1 未満の正の定数、 $d$  は評価関数とする。この時の概略図を図 1.5 に示す。

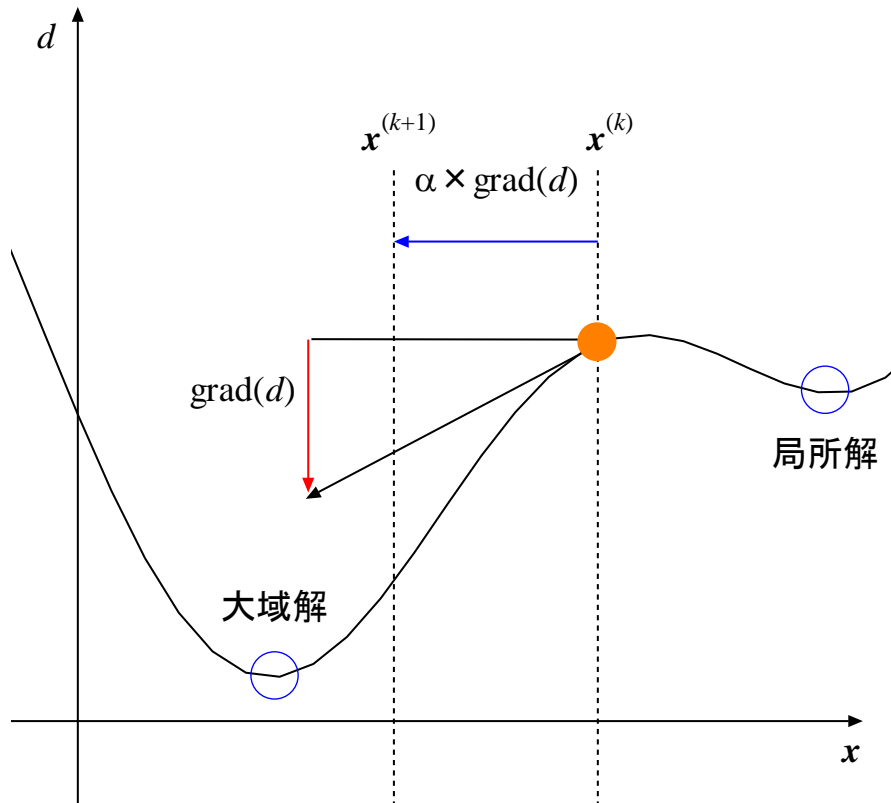


図 1.5 : 最急降下法



## 1.6 シンプソン法

シンプソン法とは、関数 $f(x)$ の定積分を、ラグランジュ補間を用いることで簡単に行うものである。ラグランジュ補間とは、 $f(x)$ 上の $(n + 1)$ 点を通る $n$ 次多項式 $P_n(x)$ を生成するものであり、 $P_n(x)$ は

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)l_j(x) \quad (1.38)$$

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \dots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \dots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \dots (x_j - x_n)} \quad (1.39)$$

で表される。今回は $n = 3$ の場合を説明する。積分範囲を $a \leq x \leq b$ とする。積分範囲を3等分にした幅を $h$ とすると、ラグランジュ補間によって $P_3(x)$ を求められる。これを用いて積分を行うと、

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\cong \int_a^b P_3(x)dx \\ &= \frac{3h}{8} [f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)] \end{aligned} \quad (1.40)$$

となる。この時の図を図 1.6 に示す。このままでは誤差が非常に大きくなるため、 $b$ を $a$ に近づけ、それを多数連ねることによって誤差を小さくする。積分範囲 $x_0 \leq x \leq x_n$ の分割数を $s$ とすると、

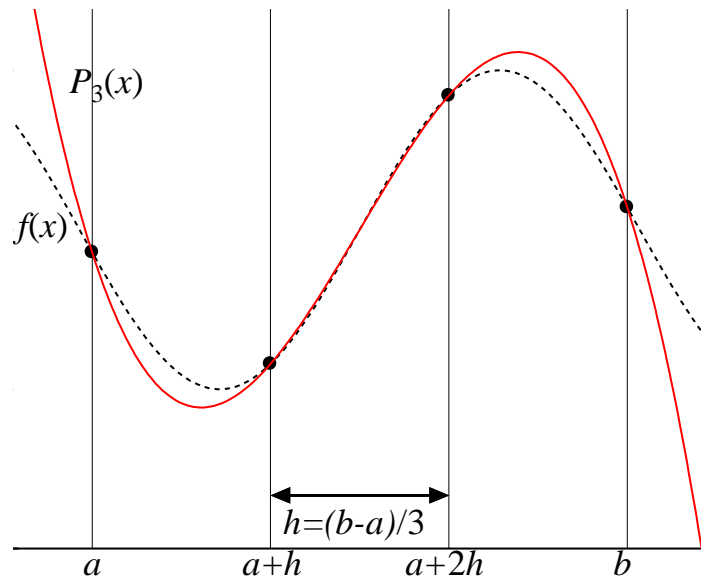


図 1.6 : シンプソン法

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \cong \frac{3(x_0 - x_n)}{8s} [f(x_0) + f(x_n) + \sum (3f(x_{3i+1}) + 3f(x_{3i+2}) + 2f(x_{3i}))] \quad (1.41)$$

となる。(1.41)式は係数が 3/8 となっていることから特にシンプソン 3/8 則と呼ばれる。

## 1.7 本研究の目的

超伝導体の性質を把握するためには、電界-電流密度特性を知ることが非常に重要になる。これにより、様々な次回及び温度においてどれくらいの電圧が超伝導体に発生するかがわかり、種々の超伝導機器の設計や開発が可能となる。その際に磁束クリープ・フローモデルを利用することはよく知られている。磁束クリープ・フローモデルを用いた計算において、適切なピンニングパラメータを決定する必要がある。現在は近似した特性の理論値が出るまで、ピンニングパラメータを逐次代入することで推定を行っており、非常に時間がかかってしまう。前年度までの研究において、遺伝的アルゴリズムを用いてピンニングパラメータの推定についての研究を行っていたが、計算の高速化においてアルゴリズムが複雑であるため困難であった。

本実験では、遺伝的アルゴリズムよりも単純な最急降下法を用いることで、磁束クリープ・フローモデルのピンニングパラメータの探索の可能性の検討・実用化を実現し、超伝導体のピンニング特性の解析を円滑にするのが本研究の目的である。

## 第2章

# 計算手法

### 2.1 計算方法

本研究ではモデルデータの $E$ - $J$ 特性を、最急降下法を用いてピンニングパラメータの推定を行った際の精度・計算時間の両方の面から検討・考察を行う。最急降下法における評価関数を今回は距離と呼ぶことにする。距離 $d$ は

$$d = \frac{\beta}{N} \sum (\log(E_{\text{exp}}) - \log(E_{\text{theo}}))^2 \quad (2.1)$$

とする。但し $E_{\text{exp}}$ は測定値、 $E_{\text{theo}}$ は理論値、 $N$ はサンプル数とする。電界-電流密度特性は両対数グラフを用いてプロットを行うことが主流であるため、対数軸上での距離の評価を行うものとする。また、係数の $\beta$ は最急降下法において、パラメータのステップ幅が大きくなりすぎることを防ぐための係数であり、今回は $1.0 \times 10^{-4}$ とする。

ピンニングパラメータは $A_m$ 、 $\sigma^2$ 、 $\gamma$ 、 $m$ 、 $g^2$ の5つである。これらの変数は(1.5)、(1.28)、(1.29)、(1.35)式に含まれる。現在変化させているパラメータが $A_m$ 、 $\sigma^2$ 、 $\gamma$ の3つであるため、今回は $A_m$ 、 $\sigma^2$ 、 $\gamma$ の3つを探索する場合について考察する。ピンニングパラメータを5つ推定することは非常に困難であるため、今回は行わないものとする。磁束バンドル内の磁束線数は1であることが多いため $g^2 = 1$ とし、 $m$ は実験データの試料が以前の測定において3であることがわかっているため、 $m = 3$ とする。さらに、最急降下法における初期点を20点、(1.37)式における $\alpha$ を0.5とする。以上を1回の実行とし、考察する際に統計的に評価するために、これを50回実行する。初期値は乱数で決めるものとし、今回設定した初期値の範囲を表2.1に示す。

表 2.1 : 初期値の範囲

	$A_m$	$\sigma^2$	$\gamma$	$m$	$g^2$
最大値	$1.0 \times 10^{12}$	$1.0 \times 10^{-2}$	1.0	3.0	1
最小値	$1.0 \times 10^{11}$	$1.0 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-2}$	3.0	1

磁束クリーブが支配的な状況、磁束フローが支配的な状況それぞれにおいて、電界-電流密度特性は直線に近似できるものと考えることができる。よって1つの $E$ - $J$ 特性につき最低2点存在すればよい。今回の計算において $E$ - $J$ 特性それぞ

れから $J$ が最大の点、最小の点の2点よりピンニングパラメータを推定する。今回のプログラムにおいて磁束クリープ・フローモデルの積分ではシンプソン3/8則を用い、積分する部分のみCPUの並列処理を利用して計算を行う。ピンニングパラメータの推定においては、探索する変数を減らすために、はじめに外部磁界 $B = 1$ のみで $\gamma$ 以外のパラメータの推定を行い、 $d < 1.0 \times 10^{-6}$ となると $\gamma$ 以外のパラメータを固定し、 $\gamma$ の推定を行う。計算の強制終了条件は複数あるため、図2.1において説明する。図中の $t$ はその初期点の評価回数とする。

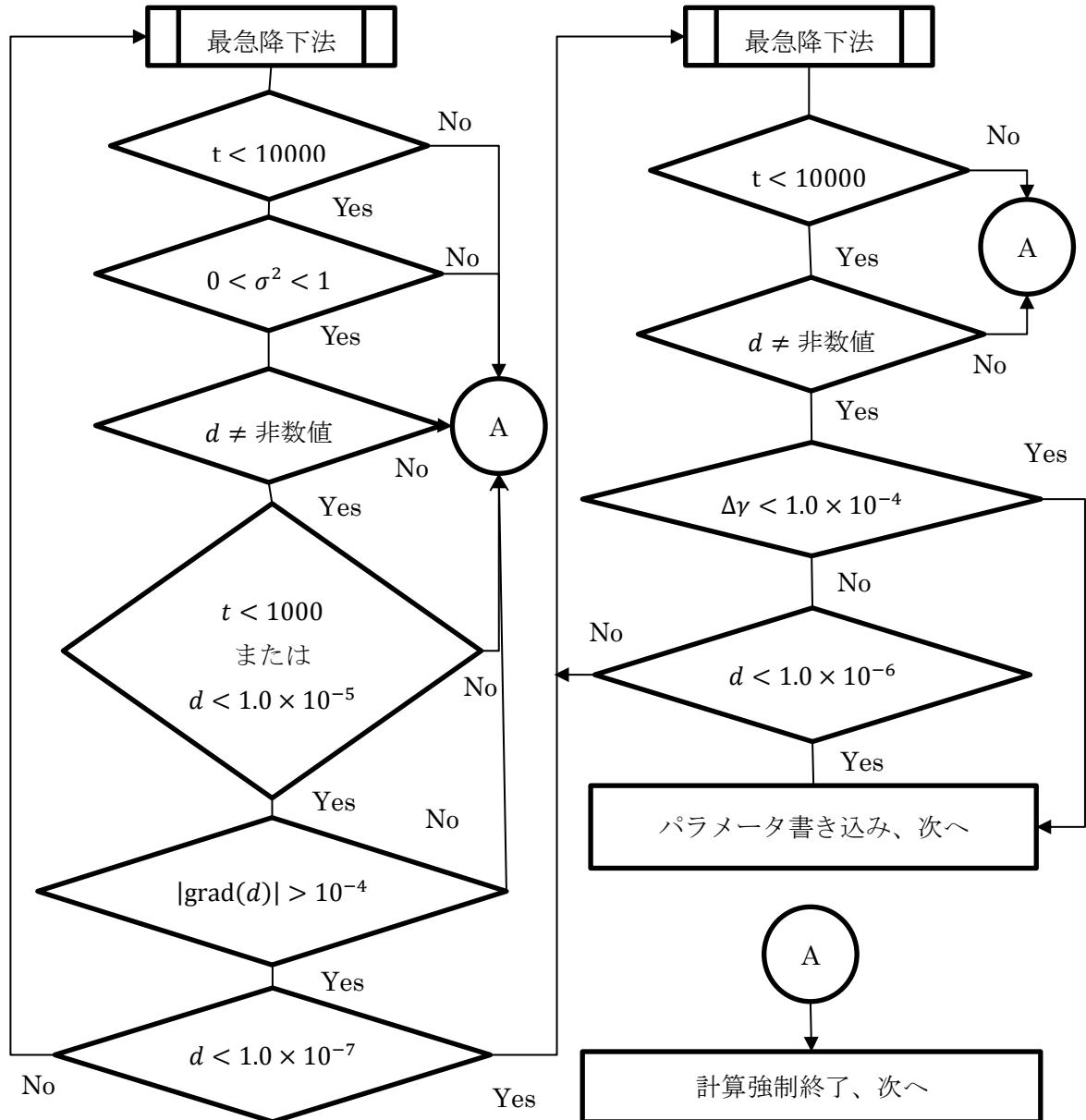


図 2.1 : フローチャート

## 2.2 計算環境

表 2.2 に計算環境を示す。

表 2.2 : 計算環境

OS	Windows 7 Professional(32-bit)
メインメモリ	4 GB(3.46 GB 使用可能)
CPU	Intel Core i3-3220
コア数	2
スレッド数	4
動作周波数	3.30 GHz

## 2.3 解析に用いるモデルデータ

今回は事前に設定したピンニングパラメータを用いて算出した $E$ - $J$ 特性と、温度 20 K、磁界 1~3 T において測定した $E$ - $J$ 特性を用いる。便宜上、前者を仮想データ、後者を実験データと呼ぶこととする。仮想データのピンニングパラメータや想定環境は実験データと同一とする。仮想データをプロットしたものを図 2.2 に、実験データをプロットしたものを図 2.3 に、ピンニングパラメータを表 2.2 に、その他の実験時のパラメータを表 2.3 に示す。

実験データは住友電気工業株式会社の Ni クラッド基板の上に PLD 法を用いて、4 層を 25 m/h で積層した $Gd_1Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$ 超伝導コート線材である。 $E$ - $J$ 特性は磁化緩和測定によって測定したものより求めたものである<sup>[17]</sup>。

表 2.3 : 実験データのピンニングパラメータ

$A_m$	$\sigma^2$	$\gamma$	$m$	$g^2$
$1.05 \times 10^{11}$	$9.50 \times 10^{-3}$	$5.80 \times 10^{-1}$	3.00	1.00

表 2.4 : 実験時のパラメータ

$T$	20 K	$T_c$	92.6 K
$B_{c2}(0)$	100 T	$\zeta$	6.28
$d$	1.04 $\mu\text{m}$	$\rho_0$	$2.0 \times 10^{-6}$

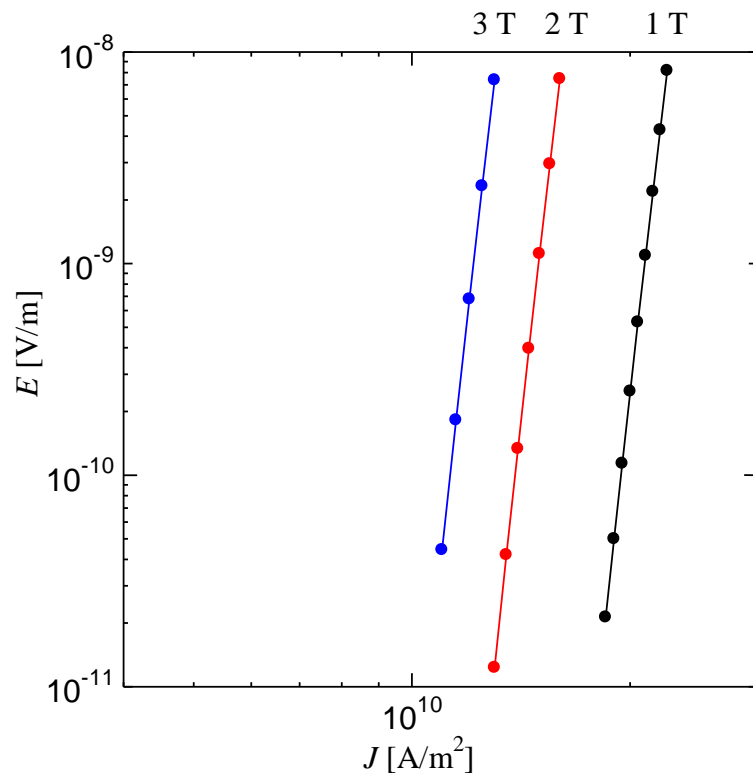


図 2.2 : 仮想データ

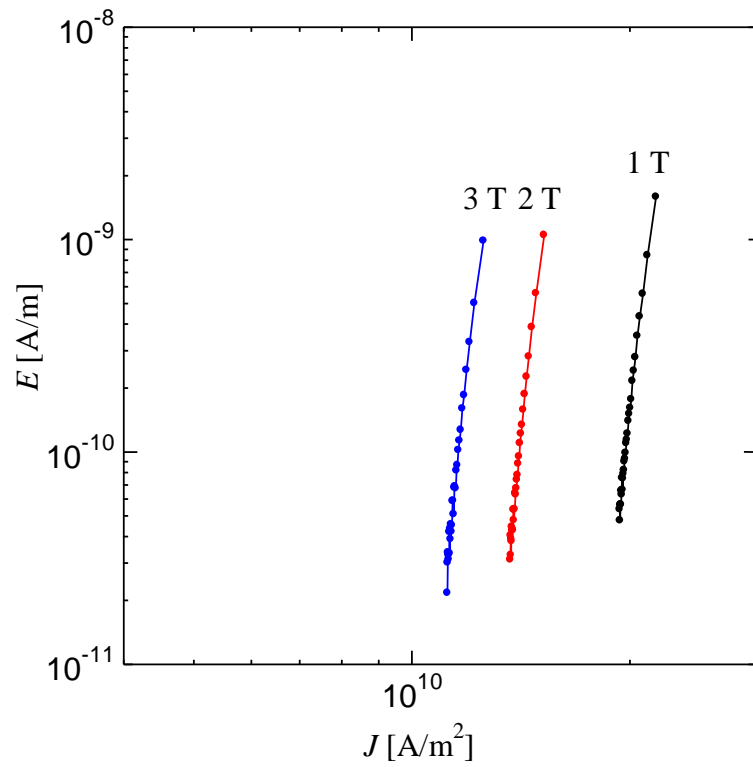


図 2.3 : 実験データ

## 第3章

# 計算結果

### 3.1 計算精度

#### 3.1.1 仮想データ

仮想データについてピンニングパラメータを推定した場合に算出されたパラメータの分散を図 3.1 に、50 回実行した内の最良解の  $E$ - $J$  特性を図 3.2 に、最悪解の  $E$ - $J$  特性を図 3.3 に示す。推定されたパラメータが仮想データで設定したパラメータを中心に分布している。また、 $E$ - $J$  特性が仮想データに近似していることがわかる。

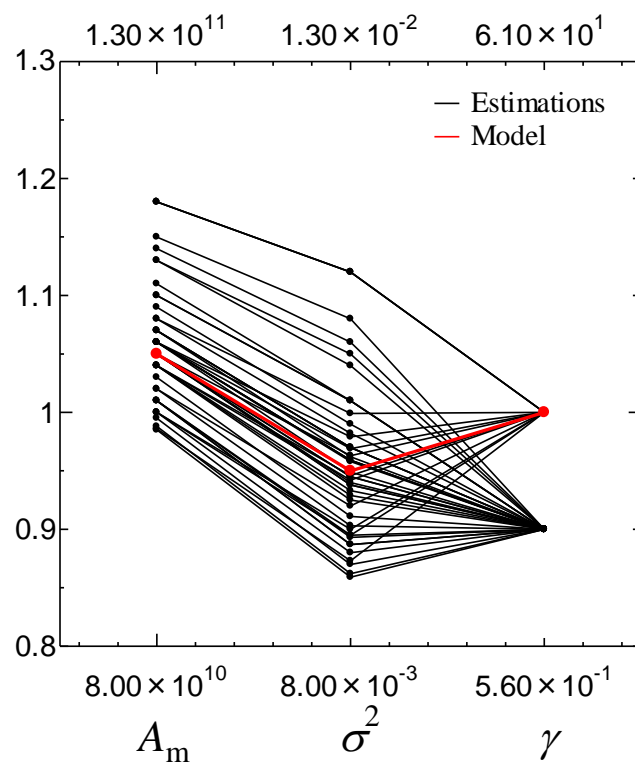


図 3.1 : 仮想データを対象とした場合に推定されたピンニングパラメータの分散。黒線の 1 本 1 本が計算結果を表している。縦軸はパラメータごとに範囲が異なり、グラフ上の数字、グラフ下の数字がそれぞれ一番下にあるパラメータごとの範囲の最大値、最小値である。

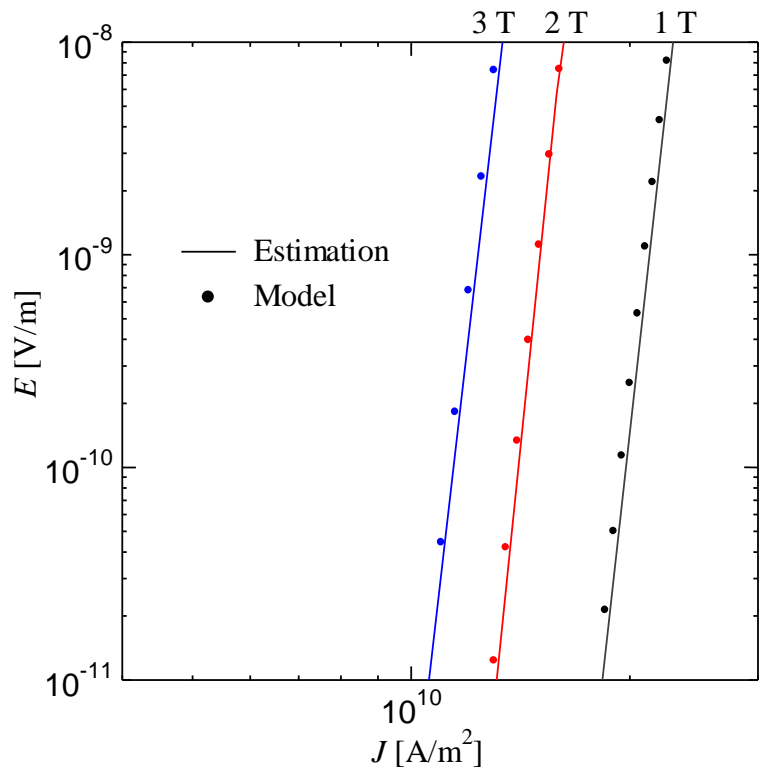


図 3.2 : 仮想データを対象とした場合の最良解

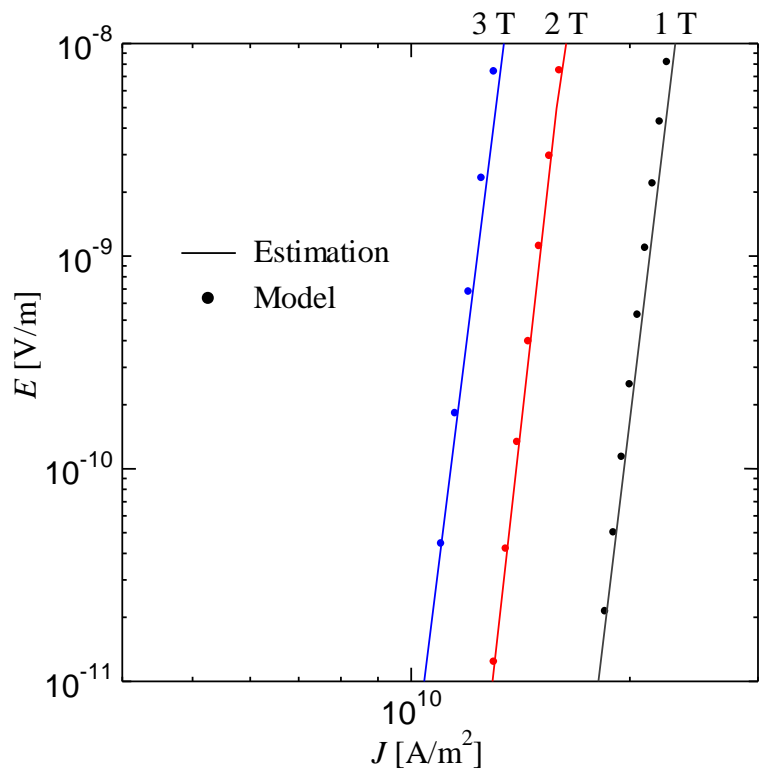


図 3.3 : 仮想データを対象とした場合の最悪解



### 3.1.2 実験データ

実験データについてピンニングパラメータを推定した場合に算出されたパラメータの分散を図 3.4 に、50 回実行した内の最良解の  $E$ - $J$  特性を図 3.5 に、最悪解の  $E$ - $J$  特性を図 3.6 に示す。推定されたパラメータが手動で計算した場合に比べて大きな値を示している。また、 $E$ - $J$  特性が実験データに近似していることがわかる。

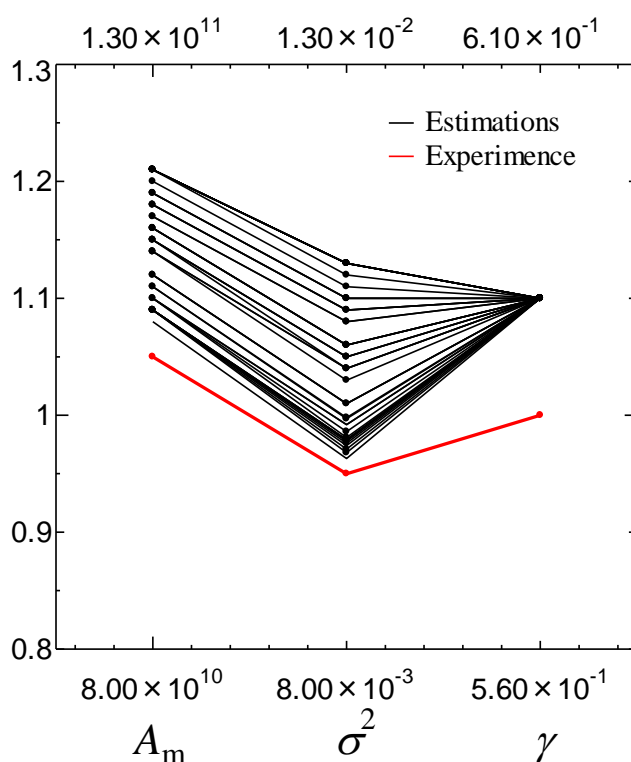


図 3.4 : 実験データを対象とした場合に推定されたピンニングパラメータの分散。黒線の 1 本 1 本が計算結果を表している。縦軸はパラメータごとに範囲が異なり、グラフ上の数字、グラフ下の数字がそれぞれ一番下にあるパラメータごとの範囲の最大値、最小値である。

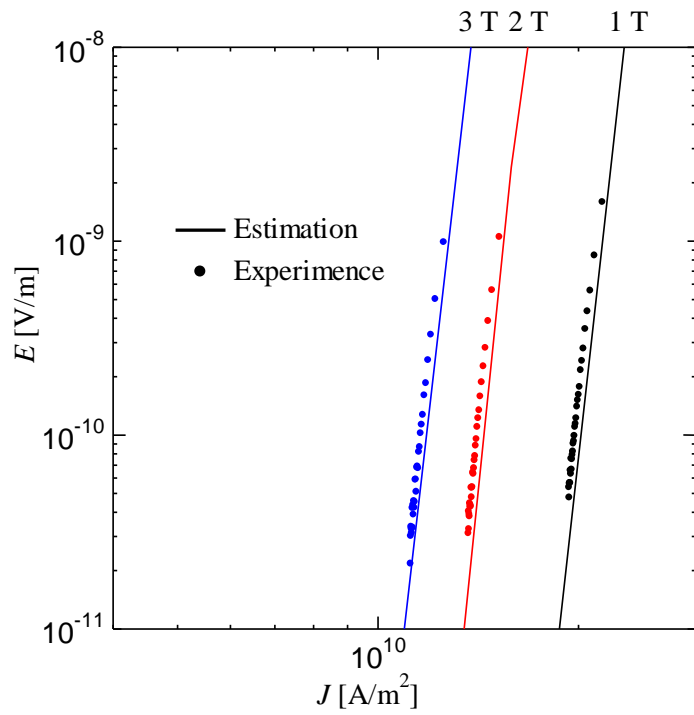


図 3.5 : 実験データを対象とした場合の最良解

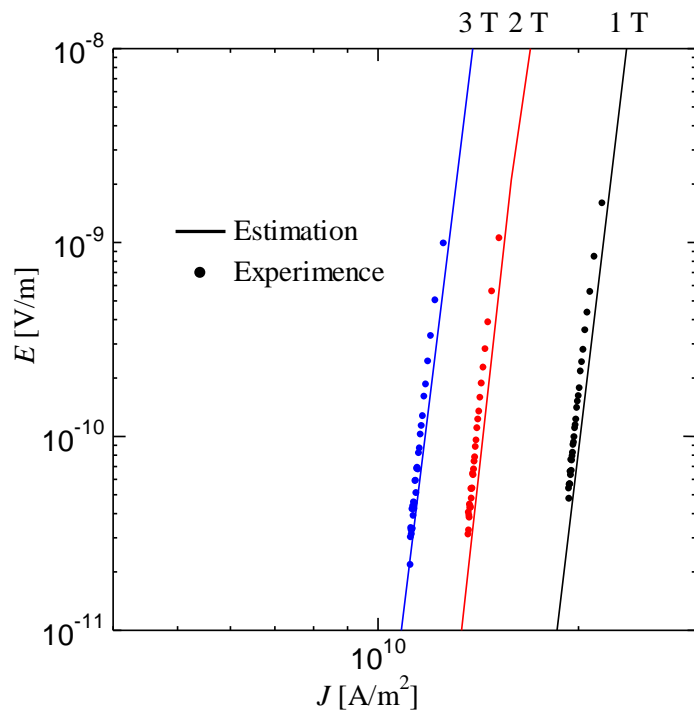


図 3.6 : 実験データを対象とした場合の最悪解

## 3.2 計算時間

仮想データを対象にしてパラメータを推定した場合にかかった時間の分布を図 3.7 に、実験データを対象にしてパラメータを推定した場合にかかった時間の分布を図 3.8 に示す。また、それぞれの最大計算時間・最小計算時間・平均計算時間を表 3.1 に示す。計算時間の分布を見ると、仮想データを対象とした場合は実験データを対象とした場合より、安定した短い時間でパラメータが推定できることがわかる。

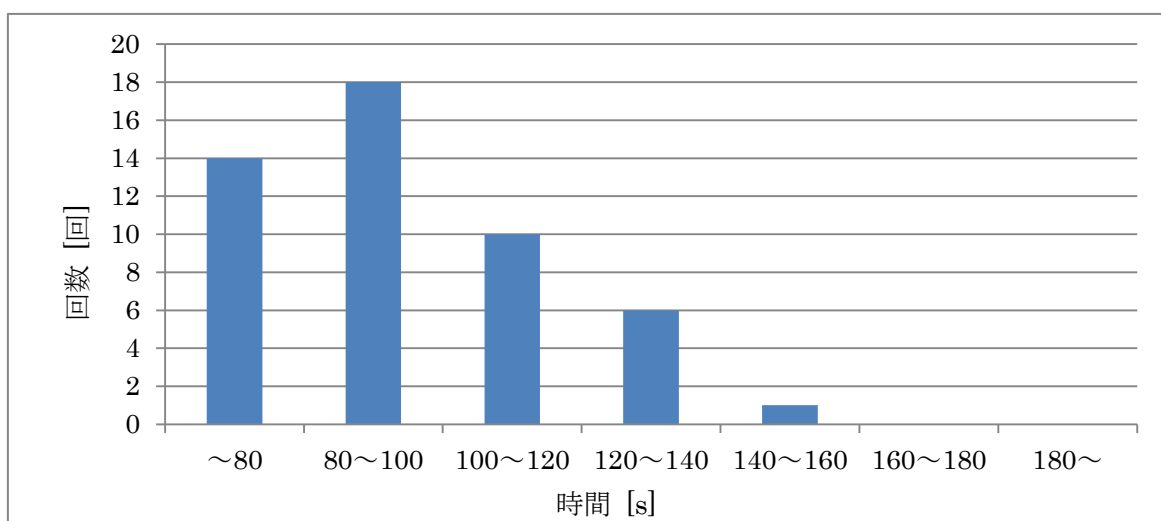


図 3.7 : 仮想データを対象とした場合の計算時間の分布。

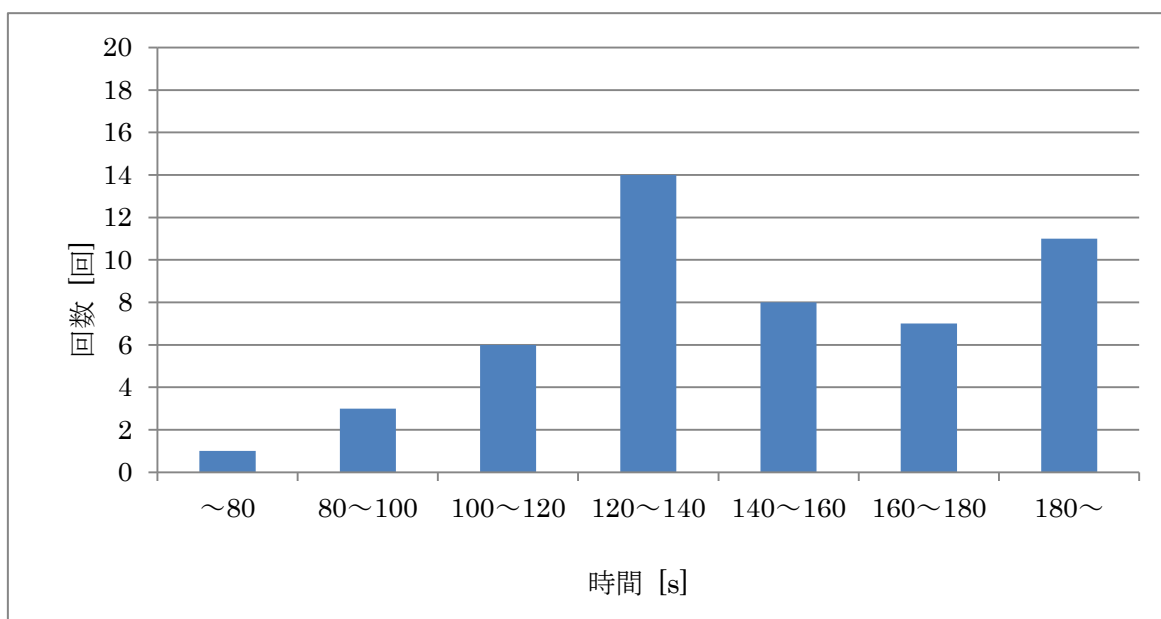


図 3.8 : 実験データを対象とした場合の計算時間の分布

表 3.1 : 計算時間

	最小計算時間 [s]	平均計算時間 [s]	最大計算時間[s]
仮想データ	65.5	93.8	140.1
実験データ	73.4	150.5	249.8

### 3.3 距離-計算回数特性

計算回数と距離の関係を図 3.9 に示す。一度 $d$ が  $1.0 \times 10^{-7}$ 以下になった後、大きく増加し、その後また下がっているのがわかる。

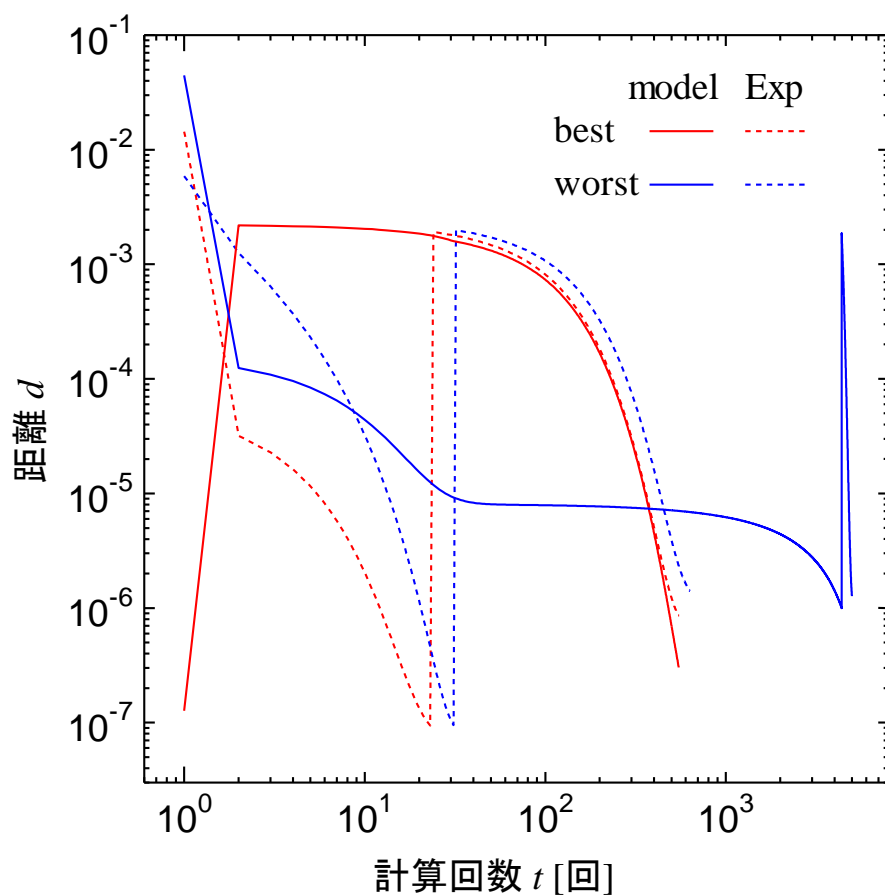


図 3.9 : 計算回数と距離の関係

## 第4章 考察

### 4.1 計算精度について

今回の計算において、仮想データを対象にピンニングパラメータを推定した場合、最良解においては設定したピンニングパラメータを算出することができた。表 4.1 に仮想データを推定した場合に算出されたピンニングパラメータの最良解と最悪解を示す。このことより、推定するピンニングパラメータが3つの場合には実用可能な精度を示すことができると予想できる。そこで、実験において測定した $E$ - $J$ 特性を用いてピンニングパラメータの推定を行った。その結果、図 3.5 や図 3.6 に示すように実験値に近似した $E$ - $J$ 特性を求めることが出来た。

具体的に精度についての考察を行うために、距離について考える。表 4.2 に仮想データ、実験データそれぞれを対象とした場合の距離の最小値、平均値、最大値を示す。全く同じパラメータを示しているにもかかわらず、 $E$ - $J$ 特性に差が生じている。これは、仮想データを生成した時には表 4.1 に示しているような値通りだが、推定する場合には表示している数値は3桁で丸めた結果しか出力しないためだと考えられる。

表 4.1 : 仮想データを対象とした場合に算出されたピンニングパラメータ

	$A_m$	$\sigma^2$	$\gamma$	$m$	$g^2$
仮想データ	$1.05 \times 10^{11}$	$9.50 \times 10^{-3}$	0.58	3.0	1.0
最良解	$1.05 \times 10^{11}$	$9.50 \times 10^{-3}$	0.58	(3.0)	(1.0)
最悪解	$1.18 \times 10^{11}$	$1.12 \times 10^{-2}$	0.58	(3.0)	(1.0)

※()内の数値は固定した数値

表 4.2 : 距離の最小値・平均値・最大値

	最小値	平均値	最大値
仮想データ	$3.036 \times 10^{-7}$	$6.598 \times 10^{-7}$	$1.269 \times 10^{-6}$
実験データ	$8.613 \times 10^{-7}$	$1.165 \times 10^{-6}$	$1.408 \times 10^{-6}$

## 4.2 計算時間について

表 4.3 に平均計算回数と平均計算時間を示す。1 計算あたりにかかる時間に大きな差は無いが、計算回数が大幅に異なっている。1 計算あたりにかかる時間は、計算内容は変わらないため同じような値を示している。つまり、計算回数や計算時間が異なる理由は、推定する対象となるデータにあることになる。また、設定している環境は同じであるため、データの個数に差は存在しない。したがって、データが理論に対して整っているかどうかという違いが計算回数に影響を及ぼしていると考えられる。

実際の使用を想定して、表 4.3 の実験データの列に注目して考える。現在行っている逐次代入によるパラメータの推定では、30 分以上かかってしまう場合もある。このことを考えると、現在かかっている時間の 10%以下の時間で計算が終わることとなる。

表 4.3 : プログラム 1 回あたりの平均計算回数と平均計算時間

	平均計算回数 [回]	平均計算時間 [s]	1 計算にかかる時間 [ms]
仮想データ	24434.08	93.8	3.839
実験データ	41392.02	150.5	3.636

## 4.3 距離-計算回数特性について

今回は 1 回目の探索として、実験データの中から外部磁界が 1 T の実験データのみ注目してパラメータを推定し、2 回目の探索として、その他の実験データ対象とした推定を行うようにしている。このため、一度  $d$  が  $1.0 \times 10^{-7}$  以下になった後、推定していないデータが追加されるため、大幅に増加する。プログラムが結果を出力して終了する条件は、 $\gamma$  の変化量がほとんどない、もしくは  $d < 1.0 \times 10^{-6}$  となることが条件である。これらのことと図 3.9 を比較すると、正確にプログラムが動作していることが考えられる。

また、今回は計算時間の長時間化を防ぐために、1 回目の探索において 1000 回計算が終了するまでに  $d < 1.0 \times 10^{-6}$  となっていない初期点は計算を強制終了するようにしていたが、図 3.9 を見ると計算回数が 1000 回以内でも十分なデータを取ることが可能だと考えられる。

## 第5章

# 結論

### 5.1 結論

最急降下法を用いて超伝導体の電界-電流密度特性の評価を行った結果、推定するピンニングパラメータが3つの場合、事前にピンニングパラメータを設定して算出した $E$ - $J$ 特性においては正しいパラメータを推定することができた。また、実験データを用いてパラメータを推定した場合には、現在行っている方法の1割以下の時間で実用化可能な精度を出すことができた。

### 5.2 今後の課題

今回の計算において、高速化においてはCPUによる並列化、実験データの評価する点の選別など、様々な工夫を行った。しかし、計算精度に関しては、探索するピンニングパラメータの分割しか行わなかった。

今後の課題として特に重要なことは、推定することができるピンニングパラメータを増やすことである。また、推定するパラメータを増やす場合、計算時間がそれだけ増加するため、更なる計算時間の短縮に関する工夫を行う必要がある。

# 謝辞

本研究を行うにあたり、多大な御指導と御助力を頂きました小田部荘司教授に深く感謝いたします。また、様々な御助言や御協力を頂いた木内勝准教授に深く感謝いたします。そして、プログラムの高速化において御助言を頂いた碓崎賢一教授に深く感謝いたします。

最後に、公私共々御世話になりました小田部・木内研究室の皆様に深く感謝致します。



## 参考文献

- [1] K. Yamafuji, T. Fujiyoshi, K. Toko, and T. Matsushita: *Physica C* 159 (1989) 743.
- [2] D. O. Welch: *IEEE Trans. Magn.* 27 (1991) 1133.
- [3] K. Yamafuji, T. Fujiyoshi, K. Toko and T. Matsushita: *Physica C* 159 (1989) 743.
- [4] T. Matsushita, T. Fujiyoshi, K. Toko and K. Yamafuji, *Appl. Phys. Lett.* 56 (1990) 2039
- [5] T. Matsushita: *Physica C* 217 (1993) 461.
- [6] M. Kiuchi, K. Noguchi, T. Matsushita, T. Kato, T. Hikata, and K. Sato *Physica C* 278 (1997) 62.
- [7] E. S. Otabe, M. Kiuchi, CHAPTER VI FLUX CREEP-FLOW MODEL.
- [8] 松下照男、「磁束ピンニングと電磁現象」、産業図書 (1994)
- [9] 松下照男、「超伝導応用の基礎」、米田出版 (2004)
- [10] 茨木俊秀、「最適化の数学 (共立講座 21世紀の数学 13)」共立出版 (2011)
- [11] Burden, Richard L. and Faires, J. Douglas. *Numerical Analysis*, (7th Ed), Brooks/Cole. (2000)
- [12] 秋吉裕哉 (2012) 「遺伝的アルゴリズムを用いた超伝導体の電界-電流密度特性評価のGPGPUによる高速化に関する研究」九州工業大学情報工学部電子情報工学科卒業論文
- [13] 南潤 (2010) 「遺伝的アルゴリズムを用いた超伝導パラメータ推定手法の検討」九州工業大学情報工学府情報システム専攻論文
- [14] 瓜生幸太郎(2011) 「遺伝的アルゴリズムを用いた磁束クリープ・フローモデルのパラメータ解析における評価方法の検討」九州工業大学情報工学部電子情報工学科卒業論文
- [15] 枝元剛典(2010) 「遺伝的アルゴリズムを用いた磁束クリープ・フローモデルのパラメータ解析」九州工業大学情報工学部電子情報工学科卒業論文
- [16] 石橋知裕(2011) 「CUDAによる高速な磁束クリープ・フローモデルの数値計算と性能評価」九州工業大学情報工学部電子情報工学科卒業論文
- [17] 高橋祐治(2009) 「CVD法によるYBCO線材の磁化緩和特性に超伝導層厚が与える影響」九州工業大学情報工学部電子情報工学科卒業論文