

メッシュ法を用いた超伝導体の 電界-電流密度特性の数値計算

小田部研究室

富岡 大貴

平成27年2月19日

電子情報工学科

目次

表目次.....	ii
図目次.....	iii
第1章 序章.....	1
1.1 超伝導体の歴史.....	1
1.2 磁束ピンニング.....	1
1.3 磁束クリープ・フローモデル.....	2
1.3.1 磁束クリープ.....	2
1.3.2 磁束フロー.....	5
1.3.3 ピンニング・ポテンシャル.....	6
1.3.4 磁束クリープ・フローモデル.....	7
1.4 不可逆磁界.....	8
1.5 メッシュ法.....	9
1.6 シンプソン法.....	10
1.7 本研究の目的.....	11
第2章 解析.....	12
2.1 計算方法.....	12
2.2 計算環境.....	13
2.3 用いるデータ.....	13
2.3.1 モデルデータ.....	13
2.3.2 実験データ.....	14
第3章 結果.....	17
3.1 モデルデータによる計算結果.....	17
3.2 IBAD 法試料についての計算結果.....	19
3.3 PLD 法試料についての計算結果.....	21
第4章 考察と結論.....	23
4.1 パラメータについての考察.....	23
4.2 評価値 d についての考察.....	25
4.3 計算時間についての考察.....	27
第5章 まとめ.....	28
謝辞.....	29
参考文献.....	30

表目次

2.1	パラメータの推定範囲と計算間隔.....	13
2.2	計算環境.....	13
2.3	実験データのピンニングパラメータ.....	13
2.4	想定した測定環境、試料緒言.....	13
2.5	IBAD 法試料の測定環境、試料緒言.....	15
2.6	PLD 法試料の測定環境、試料緒言.....	16
3.1	モデルデータの計算における各分割数とその時に得られたパラメータ.....	17
3.2	IBAD 法試料の計算における各分割数とその時に得られたパラメータ.....	19
3.3	PLD 法試料の計算における各分割数とその時に得られたパラメータ.....	21
4.1	モデルデータにおいて推定されたパラメータ.....	23
4.2	IBAD 法試料と PLD 法試料における各分割数において推定されたパラメータ.....	23
4.3	モデルデータにおける分割数と評価値の関係.....	25
4.4	IBAD 法試料と PLD 法試料における分割数と評価値の関係.....	25
4.5	分割数とその時の計算時間の値ならびに時間を規格化した値.....	27

目次

1.1 磁束バンドルの変位とエネルギーの関係の模式図	3
1.2 磁束フローの概念図	5
1.3 ピンニングポテンシャルにおける L と d の関係の概念図	8
1.4 不可逆磁界の概念図	9
1.5 メッシュ法による 2 次元の格子点のイメージ図	10
1.6 シンプソン法	11
2.1 評価関数の模式図	12
2.2 モデルデータのプロット	14
2.3 IBAD 法試料の E - J 特性	15
2.4 PLD 法試料の E - J 特性	16
3.1 モデルデータの計算における各分割数とその時に得られたパラメータ	17
3.2 モデルデータにおける規格化したパラメータの分散	18
3.3 モデルデータにおける分割数-評価値特性	18
3.4 モデルデータにおける分割数とその際の計算時間	18
3.5 IBAD 法試料の計算における各分割数とその時に得られたパラメータ	19
3.6 IBAD 法試料における規格化したパラメータの分散	20
3.7 IBAD 法試料における分割数-評価値特性	20
3.8 IBAD 法試料における分割数とその際の計算時間	20
3.9 PLD 法試料の計算における各分割数とその時に得られたパラメータ	21
3.10 PLD 法試料における規格化したパラメータの分散	22
3.11 PLD 法試料における分割数-評価値特性	22
3.12 PLD 法試料における分割数とその際の計算時間	22
4.1 IBAD 法試料において分割数 18 回と 900 回から作成した E - J 特性	24
4.2 PLD 法試料において分割数 18 回と 900 回から作成した E - J 特性	24
4.3 IBAD 法試料の分割数 120 回と 900 回から作成した E - J 特性	26
4.4 : PLD 法試料の分割数 42 回と 900 回から作成した E - J 特性	26

第 1 章 序章

1.1 超伝導体の歴史

1911 年、オランダのライデン大学の K. Onnes が液体ヘリウムを用いた極低温下での水銀の抵抗測定実験において、4.2 K 付近で突然電気抵抗が 0 に限り無く近くなるという超伝導現象を発見した。超伝導体は電気抵抗がないということから、大量の電流を通電できることが期待された。そのためコイル状の超伝導体を用いた強力な電磁石をつくろうと試みられたが、ある磁界を境に超伝導状態を保てなくなりこの試みは失敗に終わった。このことから超伝導体はある温度、ある磁界の範囲内でのみ超伝導状態を保つことがわかった。その後、長年に渡り決定的な理論は発見されなかった。1933 年に W. Meissner と R. Ochsenfeld によって超伝導体の持つ完全反磁性(マイスナー効果)が証明された。さらに 1957 年には J. Bardeen と L. N. Cooper および J. R. Schrieffer らにより、BCS 理論が提唱され超伝導発現機構が解明された。1986 年に J. G. Bednorz と K. A. Muller によって 30 K を超える銅酸化物超伝導体、 $\text{La}_2\text{BaCuO}_4$ が発見された。その 1 年後には臨界温度である T_c が液体窒素の常圧下での温度 (77.3 K) を超える $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$ や $\text{Bi}_2\text{Cr}_2\text{Ca}_2\text{Cu}_3\text{O}_{10+\delta}$ (δ は微量)などの酸化物超伝導体が発見された。その後も次々と記録を更新する銅酸化物超伝導体が発見され、遂には超伝導状態から常伝導状態に変わる温度である臨界温度 T_c が液体窒素温度(77.3 K)以上となる高温超伝導体が発見され、当時超伝導フィーバーと呼ばれるほどに T_c の更新は目まぐるしいものがあった。初の酸化物超伝導体の発見以降、 T_c が液体窒素の沸点(77.3 K)以上の高温超伝導体も発見され、今後もより高い T_c を持つ超伝導体の発見が期待されている。これらの超伝導体は液体ヘリウムに比べて安価な液体窒素や冷凍機などで超伝導状態となるため、様々な機器への応用の可能性や冷却コストの低減などの点から大きな注目を浴びた。また、2001 年の青山学院大学の秋光純教授らによる MgB_2 の発見、2008 年の東京工業大学の細野秀雄教授らによる鉄ヒ素系超伝導体の発見など、現在に至るまで盛んに超伝導体の発見が試みられている。しかし、これらの高温超伝導体も実用化に向けての課題が残っているために今日も研究が続けられている状態である

1.2 磁束ピンニング

超伝導体の特性は電気抵抗がゼロであることと完全反磁性 (Meissner 効果) を示すことであり、Meissner 効果とは超伝導体の外部から磁界をかけても超伝導体内の磁束密度 B はゼロに保たれるという性質である。超伝導体は磁気的な振る舞いの違いから第一種超伝導体と第二種超伝導体に分類される。第一種超伝導体では臨界温度 T_c 以下の温度で超伝導状態となり Meissner 効果を示すが、外部から磁界を加えていくと、ある磁界を超えた所で

Meissner 効果および超伝導状態は消失する。一方、第 2 種超伝導体は第 1 種超伝導体と同様にある磁界までは Meissner 効果を示すが、ある一定の磁界（下部臨界磁界 B_{c1} ）を超えても、超伝導体内に一定の磁束の侵入を許すことで超伝導状態を維持する。この状態を混合状態と呼ぶ。そしてさらに磁界が増加するとある磁界（上部臨界磁界 B_{c2} ）で超伝導状態が消滅する。第 1 種超伝導体の B_c に比べ、第 2 種超伝導体の B_{c2} は遥かに高い。そのため工学的応用に関して主に第 2 種超伝導体が混合状態で用いられる。

混合状態下では超伝導電流の影響により磁束線が Lorentz 力を受ける。超伝導体内に流れる電流密度を J 、超伝導体内に侵入した磁束線の磁束密度を B とすると、磁束線が受ける Lorentz 力は $F_L = J \times B$ と表すことができる。磁束線が F_L の駆動力を受け速度 v で動いた場合、電磁誘導により、 $E = B \times v$ の電界が生じ、電気抵抗として損失が発生してしまう。このように磁束線が内部に侵入した状態での損失を防ぐためには磁束線の動きを止める必要があり、ここで磁束線の動きを止めようとする作用を磁束ピンニングという。磁束ピンニングを引き起こすものとしては常伝導析出物、結晶粒界、格子欠陥などが挙げられ、これらをピンニング・センターと呼ぶ。ピンニング・センターによって生じるピンニング力により Lorentz 力は打ち消され、磁束線の動きは止められる。ピンニング・センターが単位体積あたりに及ぼすピン力密度を F_p で表すとき、電気抵抗なしに流すことのできる最大の電流密度である臨界電流密度 J_c は

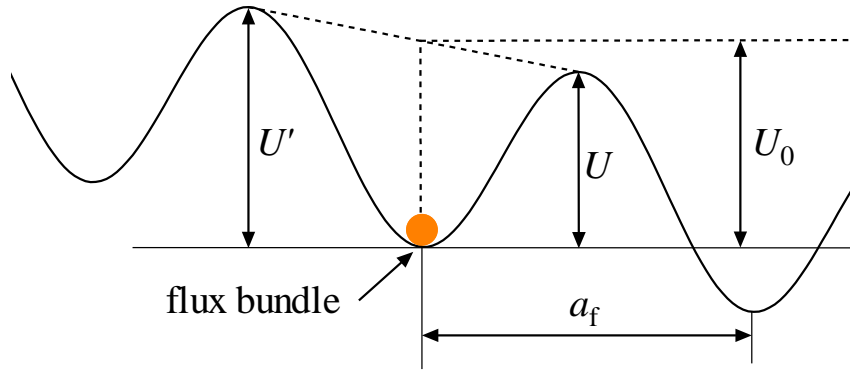
$$J_c = \frac{F_p}{B} \quad (1.1)$$

ピンニング・センターは超伝導体の不均一さ、つまり欠陥によるものであり、人工的に加えてもピンニング・センターとして働く。ピンニング・センターを人工的に導入することでより大きな J_c を得ることができるよう研究がなされている。

1.3 磁束クリープ・フローモデル

1.3.1 磁束クリープ

第二種超伝導体は磁束ピンニング特性を示すが、ある確率によりピン止めされた磁束線が熱的な擾乱の影響を受け、ピンニング・センターから外れるといった現象がおこる。これを磁束クリープという。磁束クリープは高温になるほど顕著であるため、高温での利用が期待される第二種超伝導体においてはその影響が大きくなる。超伝導体に磁界及び電流を流した状態での磁束ピンニング状態から磁束クリープが起こるとき、それまで磁束ピンニングによりピン止めされていた磁束線は磁束バンドルと呼ばれる一つの集団となり移動する。磁束バンドルの変位とエネルギーの関係の模式図を図 1.1 に示す。図において、エネルギーの山が右下がりになっているのは、Lorentz 力の影響を考慮しているためである。丸点は磁束バンドルを表し、谷の部分はピンニング・センターを表し、丸点が谷にある状態



Flux Creep

図 1.1 磁束バンドルの変位とエネルギーの関係の模式図

は磁束バンドルがピン止めされている状態を表している。基本的に熱振動がなければ磁束バンドルが動くことがないため、この図の状態が安定である。

しかし、熱の擾乱による影響を受け右の準安定状態へ移動する。その確率は活性化エネルギー U というエネルギーの山を超えるために必要なエネルギー、熱エネルギー $k_B T$ を用いて、arrhenius の式 $\exp(-U/k_B T)$ から与えられる。次の準安定状態までの距離はおよそ磁束線格子間隔 a_f と予想され、磁束線の振動周波数を ν_0 とすると、磁束バンドルが右向きに移動するときの速度 v_+ は

$$v_+ = a_f \nu_0 \exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) \quad (1.2)$$

尚、 a_f と ν_0 は

$$\nu_0 = \frac{\zeta \rho_f J_{c0}}{2\pi a_f B} \quad (1.3)$$

$$a_f = \left(\frac{2\phi_0}{\sqrt{3}B}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

で与えられる^[1]。 ζ はピン形状に依存する定数であり、点状ピンの場合 $\zeta \cong 2\pi$ 、ピンのサイズが a_f 以上の非超伝導粒子の場合 $\zeta = 4$ であることが知られている。 ρ_f はフロー比抵抗であり、 J_{c0} は磁束クリープの影響がない仮想的な臨界電流密度を表す。 J_{c0} は経験的に

$$J_{c0} = A \left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{TCN_T}\right]^m B^{\gamma-1} \left(1 - \frac{B}{B_{c2}}\right)^{TCN_B} \quad (1.5)$$

と表わされる。 A はピンニング・センターの強さを示し係数として考えられる。 γ と m はそれぞれ J_{c0} の磁界依存性と温度依存性を示している。また、 TCN_T と TCN_B はスケール則内での次数である。今回の研究においては TCN_T と TCN_B は 2 としている。

Lorentz 力と逆方向の磁束バンドルに移動する確率 $\exp(-U'/k_B T)$ を考慮した場合の全体での移動速度 v は

$$v = a_f v_0 \left[\exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{U'}{k_B T}\right) \right] \quad (1.6)$$

これと、 $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ より

$$E = B a_f v_0 \left[\exp\left(-\frac{U}{k_B T}\right) - \exp\left(-\frac{U'}{k_B T}\right) \right] \quad (1.7)$$

また、磁束バンドルの位置 x によるエネルギーの変化は

$$F(x) = \frac{U_0}{2} \sin(kx) - fx \quad (1.8)$$

で与えられ、 $k = 2\pi/a_f$ は波数、 $f = JBV$ は磁束バンドルに働く Lorentz を表す。また U_0 はピンポテンシャルエネルギーと呼ばれ、これを用いた $U_0/2$ はポテンシャルの振幅を表す。磁束バンドルが平衡位置にあるときを $x = -x_0$ とすると、 $x = x_0$ のときにエネルギーが極大となる。それぞれの位置でのエネルギー変化率は0となるので

$$x_0 = \frac{a_f}{2\pi} \cos^{-1}\left(\frac{fa_f}{U_0\pi}\right) \quad (1.9)$$

U は $F(x_0) - F(-x_0)$ から求められるので、

$$U = U_0 \sin \left[\cos^{-1}\left(\frac{fa_f}{U_0\pi}\right) - \frac{fa_f}{\pi} \cos^{-1}\left(\frac{fa_f}{U_0\pi}\right) \right] \quad (1.10)$$

(1.10)式は逆三角関数の公式により、 $\sin(\cos^{-1}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ となるので

$$U = U_0 \left[\left\{ 1 - \left(\frac{2f}{U_0\pi}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - \frac{2f}{U_0 k} \cos^{-1}\left(\frac{2f}{U_0 k}\right) \right] \quad (1.11)$$

(1.11)が成立する上で熱振動がないとするならば $U = 0$ となり理想的な臨界状態が考えられる。そのためには $2f/U_0 k = 2J_{c0}BV/U_0 k = 1$ であり、つまり $J = J_{c0}$ となるため

$$\frac{2f}{U_0 k} = \frac{J}{J_{c0}} = j \quad (1.12)$$

の関係式が得られる。 j は規格化電流密度であり、これより(1.11)式における U は

$$U(j) = U_0 \left[(1-j^2)^{\frac{1}{2}} - j \cos^{-1} j \right] \quad (1.13)$$

となる。さらに $k = 2\pi/a_f$ 及び(1.12)式から

$$U'(j) \cong U + fa_f = U + \pi U_0 j \quad (1.14)$$

と求められるのでこれより(1.6)式を電界について整理すると

$$E = B a_f v_0 \exp\left(-\frac{U(j)}{k_B T}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi U_0 j}{k_B T}\right) \right] \quad (1.15)$$

以上より(1.15)式が求められ、磁束クリープにより発生する電界が求められた。

1.3.2 磁束フロー

磁束クリープの状態からさらに電流を流していくと、やがてピンニング力が Lorentz 力を支えることができなくなり、すべての磁束線が連続的に動き出す。これを磁束フローと呼び、図 1.2 のような状態となる。ポテンシャルの山、谷はなくなり、ポテンシャルは Lorentz 力方向へと傾いた極値を持たない曲線となる。磁束フローによって発生する電界のみを評価するために、磁束クリープの影響がない状態を仮定する。超伝導体に電流が流れ、外部磁界が印加されているときの単位体積あたりの磁束線に働く Lorentz 力は $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ で与えられる。Lorentz 力の方向の単位ベクトルを $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ とすると、Lorentz 力とピンニング力の釣り合いの式は

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \delta F_{p0} = 0 \quad (1.16)$$

となる。ただし F_{p0} は磁束クリープの影響がない仮想的なピンニング密度である。このとき $J = F_{p0}/B = J_{c0}$ の関係が得られる。この後電流が増加し $J > J_{c0}$ となると磁束フロー状態となる。磁束フロー状態では粘性力を考慮して

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \delta F_p - \frac{B}{\phi_0} \eta \mathbf{v} = 0 \quad (1.17)$$

ϕ_0 は量子化磁束、 η は粘性係数を示す。これを $J_{c0} = F_p/B$ 及び $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v}$ を用いて解くと、

$$J = J_{c0} + \frac{E}{\rho_f} \quad (1.18)$$

ここで ρ_f は $B\phi_0/\eta$ でフロー比抵抗である。また、常伝導状態における抵抗密度 ρ_0 を用いると ρ_f は

$$\rho_f = J_{c0} + \frac{\rho_0 T B}{T_c B_{c2}} \quad (1.19)$$

と求められることから(1.19)式を電界 E について計算すると

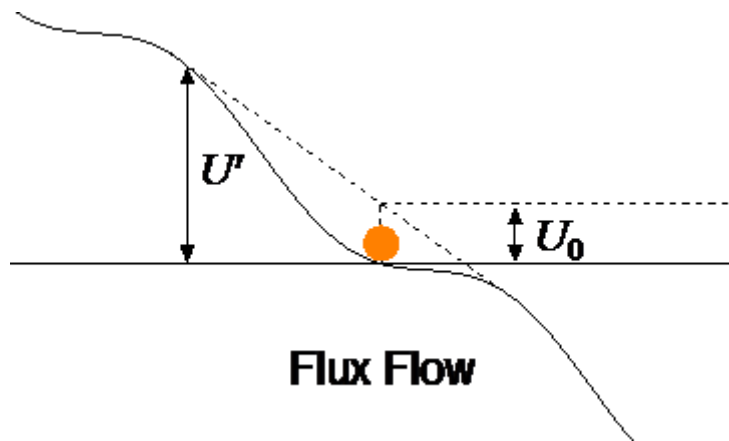


図 1.2 : 磁束フローの概念図

$$E = \rho_f(J - J_{c0}) \quad (1.20)$$

が導かれ、磁束フローによる電界が求まる。

1.3.3 ピンニング・ポテンシャル

磁束クリープによる超伝導電流の緩和率や、不可逆曲線を決定するうえで重要なパラメータであるピンニング・ポテンシャル U_0 を理論的に見積もる。ピンニング・ポテンシャルは磁束線の単位体積あたりの平均化したピンニング・ポテンシャル・エネルギー \hat{U}_0 と磁束バンドルの体積 V の積で表され

$$U_0 = \hat{U}_0 V \quad (1.21)$$

この \hat{U}_0 はLabuschパラメータ α_L と相互作用距離 d_i を用いて

$$\hat{U}_0 = \frac{\alpha_L d_i^2}{2} \quad (1.22)$$

したがって、磁束クリープがないと仮定した場合の理想的な臨界電流密度 J_{c0} と α_L 、 d_i は、ピン力密度 F_p と

$$\begin{aligned} F_p &= J_{c0} B \\ &= \alpha_L d_i \end{aligned} \quad (1.23)$$

の関係がある。ここで d_i はピン形状に依存する定数 ζ と格子間隔 a_f に

$$d_i = \frac{a_f}{\zeta} \quad (1.24)$$

の関係があるので、(1.22)式を用いて(1.21)式は

$$U_0 = \frac{1}{2\zeta} J_{c0} B a_f V \quad (1.25)$$

と表される^[2]。したがって(1.22)式より U_0 の値の決定にはピン力の強さだけではなく、磁束バンドルの体積が重要であることがわかる。また、 a_f は(1.4)式と(1.24)式から変位が相互作用距離 d_i 以内であれば、磁束線の運動はほぼピンニング・ポテンシャル内に限られ可逆であるが、これを超えると現象は不可逆になり、ピン力密度は一般に知られた値に飽和していくと考えられる。磁束線と平行(縦)方向及び垂直(横)方向の相関距離をそれぞれ L 、 R とすると、これらによって磁束バンドルの体積が決定される。この磁束バンドルの体積を模式的に表した図を図1.3に示す。横方向のピンニング相関距離 R は格子間隔 a_f 程度かその数倍であると考えられており

$$R = g a_f \quad (1.26)$$

このような関係がある^[3]。 g^2 は磁束バンドル中の磁束線の本数を示す。縦方向のピンニング相関距離 L は弾性理論から

$$L = \left(\frac{C_{44}}{\alpha_L} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{B a_f}{\zeta \mu_0 J_{c0}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.27)$$

となる。 $C_{44} = B^2/\mu_0$ は磁束線の曲げ歪みに対する弾性定数である。この L は超伝導層が薄い場合には、その厚さ d に制限されることがある。したがって、超伝導層の大きさが U_0 の大きさに影響を与え、 d が L より大きい 3次元ピンニングのとき、磁束バンドルの体積 V は $V = R^2L$ となり、

$$U_0 = \frac{0.835g^2k_BJ_{c0}^{\frac{1}{2}}}{\zeta^{\frac{3}{2}}B^{\frac{1}{4}}} \quad (1.28)$$

が求められる。 d が L より小さい 2次元ピンニングとなり、平行方向のバンドルサイズは d となるので、 $V = R^2d$ となり

$$U_0 = \frac{4.23g^2k_BJ_{c0}d}{\zeta B^{\frac{1}{2}}} \quad (1.29)$$

となる。

1.3.4 磁束クリープ・フローモデル

ここまで述べてきたように、超伝導体には磁束クリープ、及び磁束フローによる電界が発生する。これらの電界を考慮し、超伝導体に発生する全体での電界を理論的に求めるモデルが磁束クリープ・フローモデルである。磁束クリープにより生じる電界成分 E_{cr} は

$$\begin{aligned} E_{cr} &= Ba_f v_0 \exp\left[-\frac{U(j)}{k_B T}\right] \left[1 - \exp\left(\frac{\pi U_0 j}{k_B T}\right)\right] \quad (j \leq 1) \\ &= Ba_f v_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi U_0}{k_B T}\right)\right] \quad (j > 1) \end{aligned} \quad (1.30)$$

である。一方で、磁束フローによる電界成分 E_{ff} は

$$\begin{aligned} E_{ff} &= 0; & (j \leq 1) \\ &= \rho_f (J - J_{c0}); & (j > 1) \end{aligned} \quad (1.31)$$

これらの寄与からなる電界 E' は

$$E' = (E_{cr}^2 + E_{ff}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (1.32)$$

で近似的に与えられる。また、ここでの j は(1.12)式で示される、規格化された電流密度である。

酸化物超伝導体は超伝導体内の不均一さが著しく、また弱結合などの影響からピンニング力密度が広く分布されると考えられる。そこでピンニング力の強さを表すパラメータ A の分布を表す関数を

$$f(A) = K \exp\left[-\frac{(\log A - \log A_m)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.33)$$

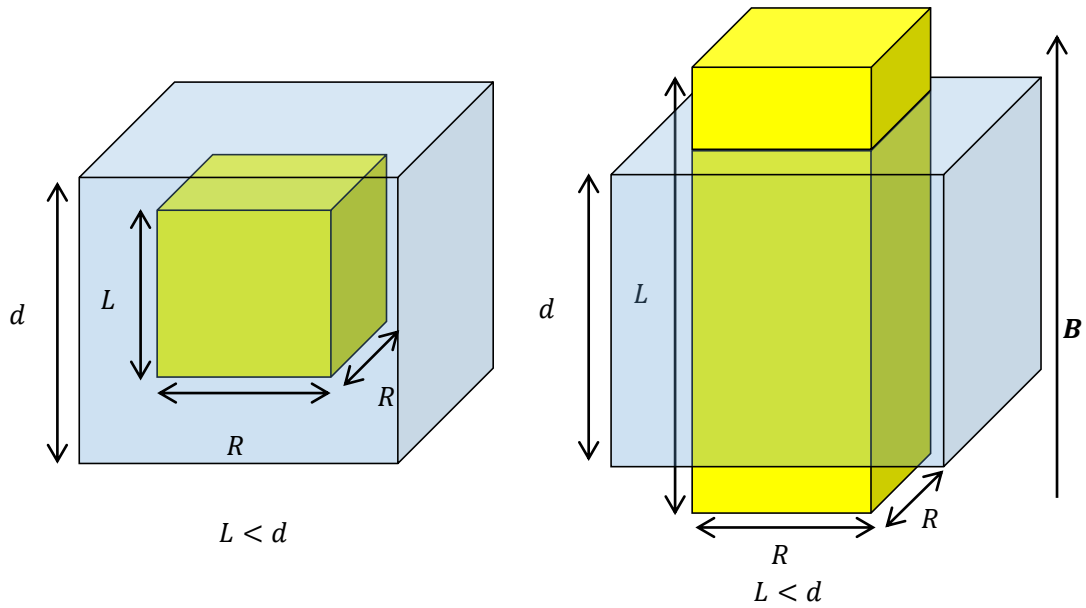


図 1.3 : ピンニングポテンシャルにおける L と d の関係の概念図

ここで、 A_m は A の最頻値、 K は規格化定数であり、 σ^2 はピン力密度の分布幅を表すパラメータである。このように A の分布を考慮した全体の電界は

$$E(J) = \int_0^{\infty} E f(A) dA \quad (1.34)$$

となり、この(1.34)式より理論的な $E - J$ 特性が求められ、 $E - J$ 特性を評価することが可能となる。

1.4 不可逆磁界

1.2節で述べたように第二種超伝導体は第一種超伝導体より高い磁界で超伝導状態を維持することができる。混合状態において上部臨界磁場 B_{c2} まで電気抵抗0で流せる電流が存在すると考えられていた。しかし、実際には B_{c2} 付近においてピンニングが有効でなくなり、 J_c も0となる。また、ピンニングによる超伝導体の磁化の不可逆性もなくなり、磁化が可逆となる。この $J_c = 0$ と $J_c \neq 0$ の境界の磁界を不可逆磁界 B_i という。また、温度毎の不可逆磁界の値を連ねた曲線を不可逆磁界といい、これを図 1.4 に示す。

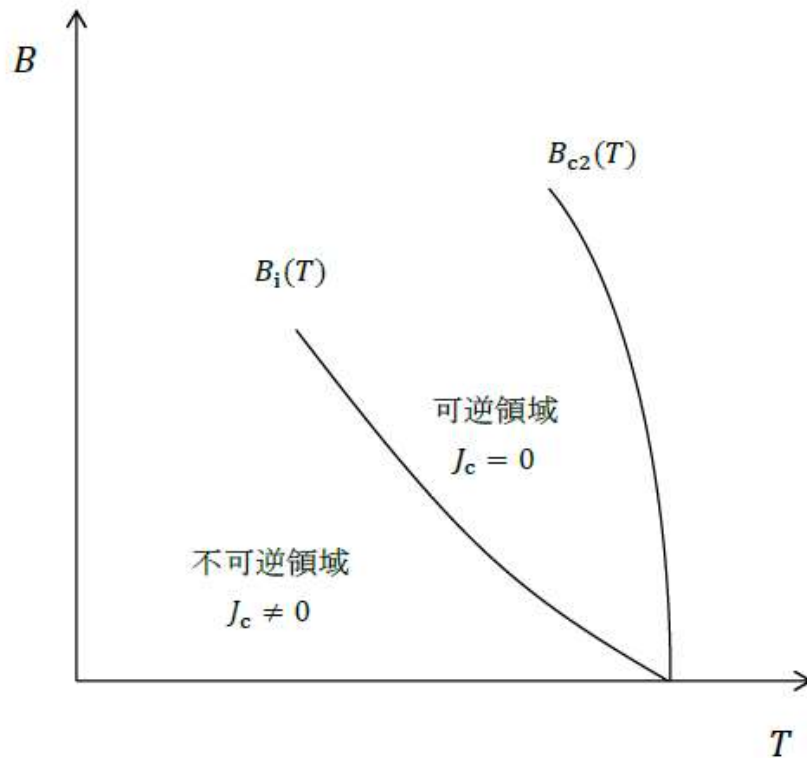


図 1.4 : 不可逆磁界の概念図

1.5 メッシュ法

計算方法として採用しているメッシュ法とは、パラメータの範囲をそれぞれ等間隔で分割し、多次元の格子状にしてすべての組み合わせにおいて計算を行い、それらより全体の解を出すものである。例として、2次元の場合を想定した、 A_m と σ^2 の2変数の場合の模式図を図 1.5 に示す。今回は求めるパラメータが4つなので4次元の格子点が設けられることになる。

このメッシュ法が他の方法と比較して優れている点はいくつか存在する。遺伝的アルゴリズムや最急降下法アルゴリズムなどでは、最初に乱数を発生させてその値によって計算しているため、実行するごとに計算量や計算時間が変化するがメッシュ法は入力が入力一定であれば実行毎の計算量は一定になる。従って計算時間の把握が容易である。

また、遺伝的アルゴリズムや最急降下法アルゴリズム等の初期点を乱数に依存するアルゴリズムは、初期点によっては局所解に陥る可能性が存在する。しかし、メッシュ法においては全体を一様に計算するため、局所解に陥る心配がない。

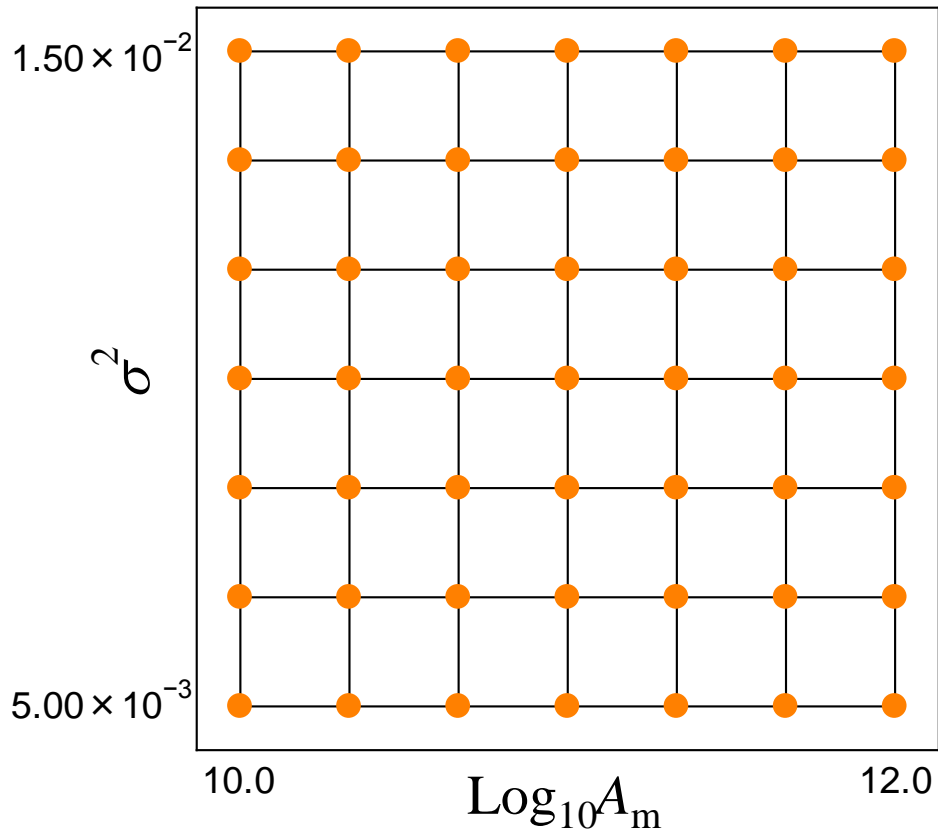


図 1.5 : メッシュ法による 2次元の格子点のイメージ図

1.6 シンプソン法

磁束クリープ・フローにおける積分の近似にはシンプソン法を採用している。シンプソン法とは、関数 $f(x)$ の定積分をラグランジュ補間を用いることで簡単に行うものである。ラグランジュ補間とは、 $f(x)$ 上の $(n+1)$ 点を通る n 次多項式 $P_n(x)$ を生成するものであり、 $P_n(x)$ は、

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j) l_j(x) \quad (1.35)$$

$$l_j(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_n)} \quad (1.36)$$

で表される。今回は $n=3$ で取り扱うため、この場合を説明する。積分範囲を $a \leq x \leq b$ とする。積分範囲を3等分した幅を h とすると、ラグランジュ補間によって $P_3(x)$ を求められる。これを用いて積分を行うと、

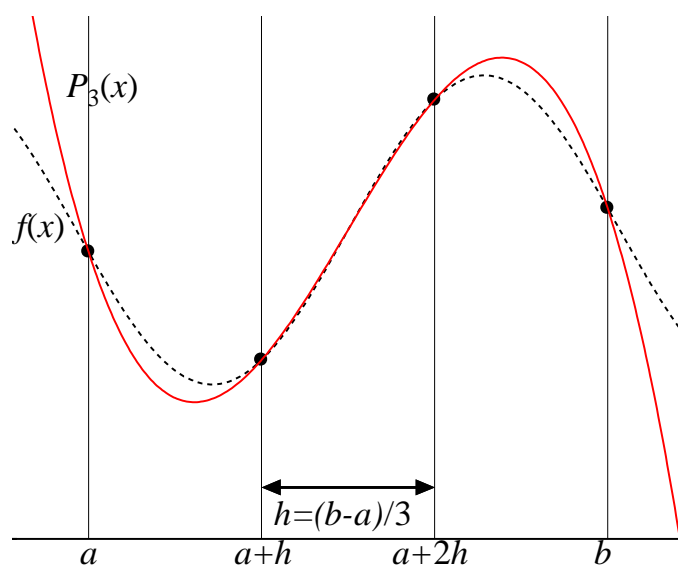


図 1.6 : シンプソン法

$$\int_a^b f(x) dx \cong \int_a^b P_3(x) dx$$

$$= \frac{3}{8} h [f(a) + 3f(a+h) + 3f(a+2h) + f(b)] \quad (1.37)$$

この時の図を図 1.6 に示す。このままでは誤差が非常に大きくなるため b を a に近づけ、それを多数連ねることによって誤差を小さくする。積分範囲 $x_0 \leq x \leq x_n$ の分割数を s とすると

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x) dx \cong \frac{3(x_0 - x_n)}{8s} [f(x_0) + f(x_n) + \sum (3f(x_{3i+1}) + 3f(x_{3i+2}) + 2f(x_{3i}))] \quad (1.38)$$

となる。(1.38)式は係数が $3/8$ となっていることから特にシンプソン $3/8$ 則と呼ばれる。

1.7 本研究の目的

超伝導体の性質を把握するためには、電界-電流密度特性を知ることが非常に重要になる。これにより、様々な次回及び温度においてどれくらいの電圧が超伝導体に発生するかがわかり、種々の超伝導機器の設計や開発が可能となる。電界-電流密度特性 (E - J 特性) を理論的に把握するために磁束クリープ・フローモデルがよく用いられている。磁束クリープ・フローモデルにおけるパラメータを推定する際に、遺伝的アルゴリズムや最急降下法アルゴリズムなど様々な手法を利用することができ、その特性が詳細に解析されている。しかし、計算の高速化においてアルゴリズムが複雑である為に、計算する際に時間が非常にかかってしまう。よって本研究では、簡便なアルゴリズムであるメッシュ法を用いて、シンプソン法における分割数に着目し、より速く、より精度のよい計算を行うことを目的とする。

第 2 章 解析

2.1 計算方法

本研究ではモデルデータの E - J 特性を、メッシュ法を用いてピンニングパラメータの推定を行った際の精度・計算時間の両方の面から検討・考察を行う。メッシュ法における評価関値を

$$d = \frac{1}{N} \sum (\log(E_{\text{cal}}) - \log(E_{\text{exp}}))^2 \quad (2.1)$$

で表し、 d を評価値と呼ぶこととする。但し E_{exp} は測定値、 E_{theo} は理論値、 N はサンプル数とする。電界-電流密度特性は両対数グラフを用いてプロットを行うことが主流であるため、対数軸上で評価を行うものとする。この時の模式図を図 2.1 に示す。今回求めるパラメータは、ピン力の強さの最頻値 A_m 、ピン力の分散 σ^2 、磁束クリープがないと仮定した仮想的な臨界電流密度の磁界依存性 γ 、及び温度依存性 m の 4 つとする。これらの計算範囲と各パラメータの間隔を表 2.1 に示す。

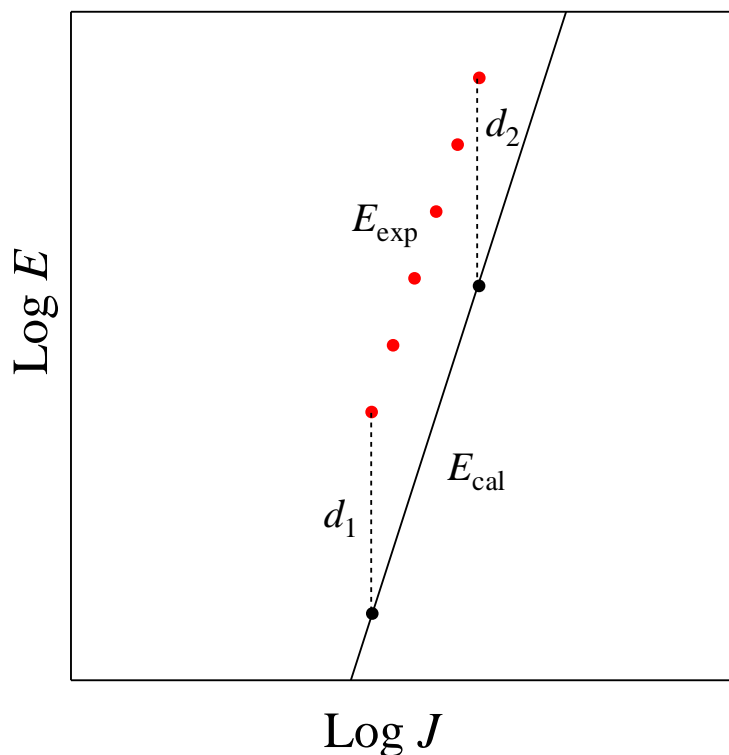


図 2.1 : 評価関数の模式図

表 2.1 : パラメータの推定範囲と計算間隔

	$\text{Log}_{10}(A_m)$	σ^2	γ	m
上限	1.20×10^1	1.50×10^{-2}	7.00×10^{-1}	4.00
下限	1.00×10^1	5.00×10^{-3}	5.00×10^{-1}	2.00
刻み幅	2.00×10^{-1}	1.00×10^{-3}	2.00×10^{-2}	0.20

2.2 計算環境

表 2.2 に今回の計算を実行した計算環境を示す。

表 2.2 : 計算環境

OS	Windows 7 Professional(64-bit)
メインメモリ	4.00 GB
CPU	Intel Core i7-870
コア数	4
スレッド数	8
動作周波数	2.93 GHz

2.3 用いるデータ

2.3.1 モデルデータ

今回は事前に設定したピンニングパラメータを用いて算出した E - J 特性を用いる。便宜上、これをモデルデータと呼ぶ。モデルデータに用いたパラメータを表 2.3 に、想定した試料の緒言を表 2.4 に、 E - J 特性をプロットしたものを図 2.2 に示す。

表 2.3 : 実験データのピンニングパラメータ

A_m	σ^2	γ	m	g^2
1.00×10^{11}	1.00×10^{-2}	6.00×10^{-1}	3.00	1.00

表 2.4 : 想定した測定環境、試料緒言

測定温度 T	20 K, 30 K	測定磁場 B	1 T, 2 T, 3 T
0 K における B_{c2} $B_{c2}(0)$	100 T	臨界温度 T_c	100 K
超伝導層の厚さ d	1.00 μm	ピン形状による定数 ζ	6.28
常伝導状態における抵抗率 ρ_0	2.00×10^{-6}		

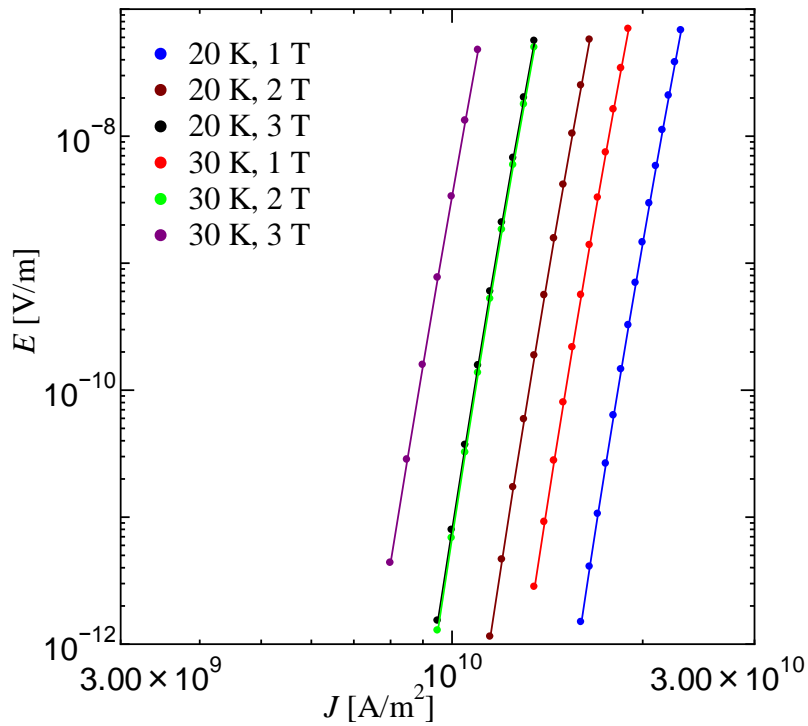


図 2.2 : モデルデータのプロット

2.3.2 実験データ

今回、実験データは住友電気工業株式会社の Ni クラッド基板の上に IBAD 法を用いて、6 層を 25 m/h で積層した $(Y_xGd_{1-x})Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$ 超伝導コート線材と、国際超電導産業技術研究センター (ISTEC-SRL) の PLD 法を用いて $GdBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ コート線材に BXO ピンを導入したものをを用いた。これらの E - J 特性は磁化緩和測定によって測定したものより求めたものである。便宜上、それぞれ IBAD 法試料、PLD 法試料と呼ぶこととする。各実験データをプロットしたものを図 2.3、図 2.4 に、測定環境等を表 2.5、表 2.6 にそれぞれ示す。

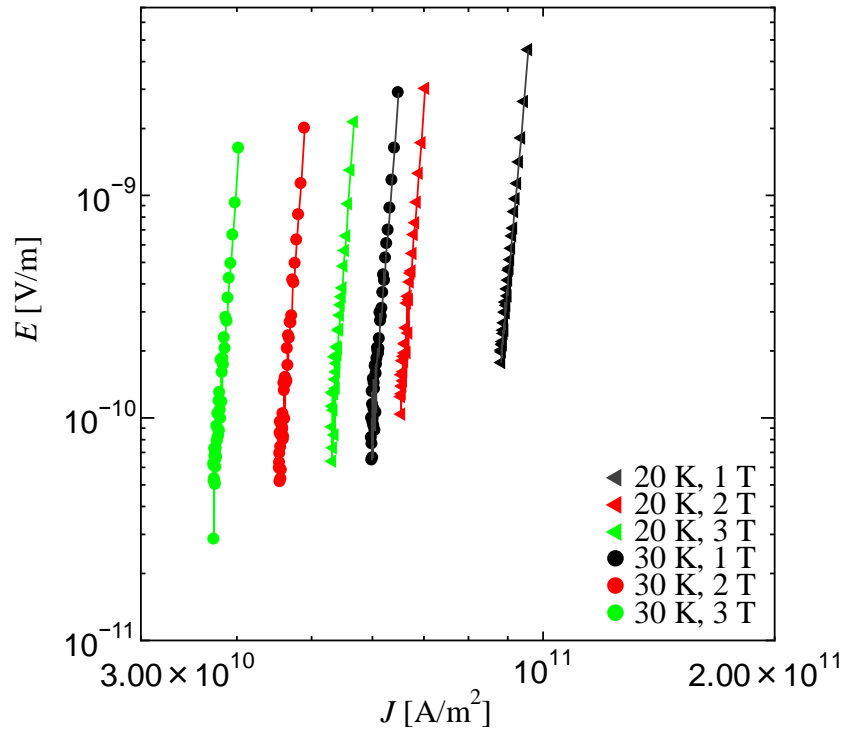


図 2.3 : IBAD 法試料の E - J 特性

表 2.5: IBAD 法試料の測定環境、試料緒言

製造会社	住友電気	材料	$(Y_xGd_{1-x})Ba_2Cu_3O_{7-\delta}$
測定温度 T	20 K, 30 K	測定磁場 B	1 T, 2 T, 3 T
0 K における B_{c2} $B_{c2}(0)$	100 T	臨界温度 T_c	90.3 K
超伝導層の厚さ d	1.50 μm	ピン形状による定数 ζ	6.28
常伝導状態における抵抗率 ρ_0	1.50×10^{-6}	人口ピン	無し

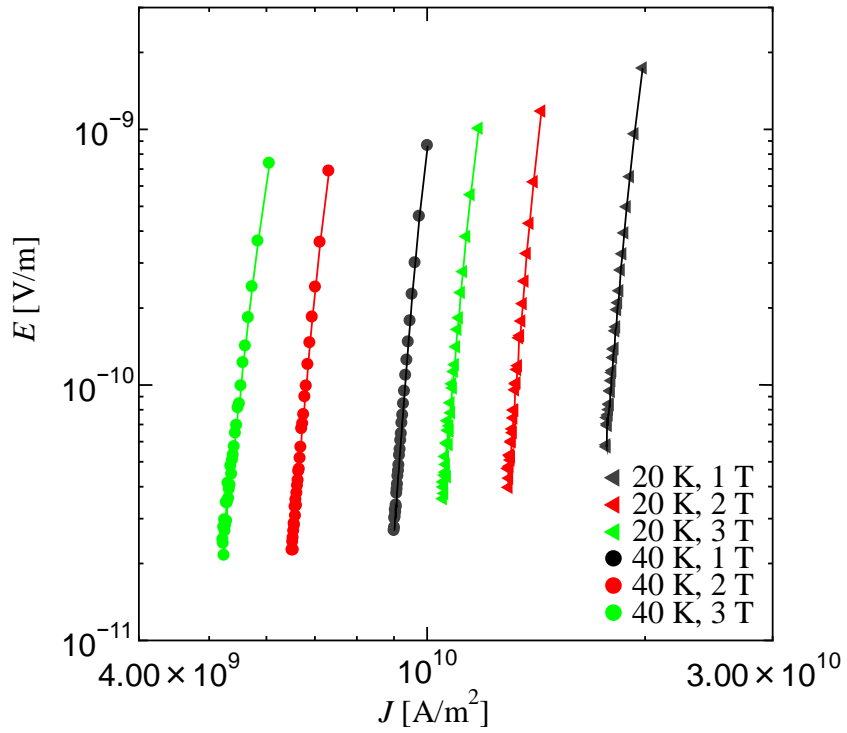


図 2.4 : PLD 法試料の E - J 特性

表 2.6 : PLD 法試料の測定環境、試料緒言

製造会社	ISTEC-SRL	材料	$\text{GdBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-\delta}$
測定温度 T	20 K, 40 K	測定磁場 B	1 T, 2 T, 3 T
0 K における B_{c2} $B_{c2}(0)$	100 T	臨界温度 T_c	92.2 K
超伝導層の厚さ d	1.56 μm	ピン形状による定数 ζ	6.28
常伝導状態における抵抗率 ρ_0	1.50×10^{-6}	人口ピン	BXO

第 3 章 結果

3.1 モデルデータによる計算結果

モデルデータについて得られた分割数が小さい時に得られたパラメータを表 3.1 にまとめ、それらをグラフにしたものを図 3.1 に示す。また、設定値で規格化したパラメータの分散を図 3.2 に、分割数による評価値 d の変化を図 3.3 に示す。また、これらを計算した際の分割数毎の計算時間を図 3.4 に示す。

表 3.1 と図 3.1、更に図 3.2 より分割数が 15 回未満の時はパラメータがばらつくが 15 回以上の場合は計算結果によって得られるパラメータの値が同じになることが分かる。図 3.3 より評価値 d が限りなく小さい値を取り、精度の高い推定ができていることがわかる。

表 3.1 : モデルデータの計算においての各分割数とその時に得られたパラメータ

	$A_m(\times 10^{11})$	$\sigma^2(\times 10^{-2})$	γ	m
3回	1.58	0.13	0.56	3.60
6回	1.00	0.90	0.56	3.60
9回	1.00	0.90	0.58	3.60
15回以上	1.00	0.90	0.60	3.60

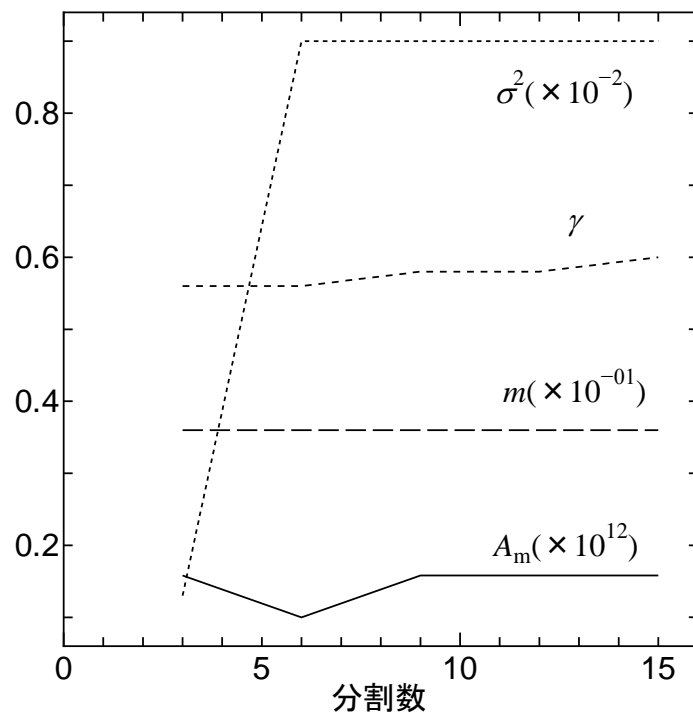


図 3.1 : モデルデータの計算においての各分割数とその時に得られたパラメータ

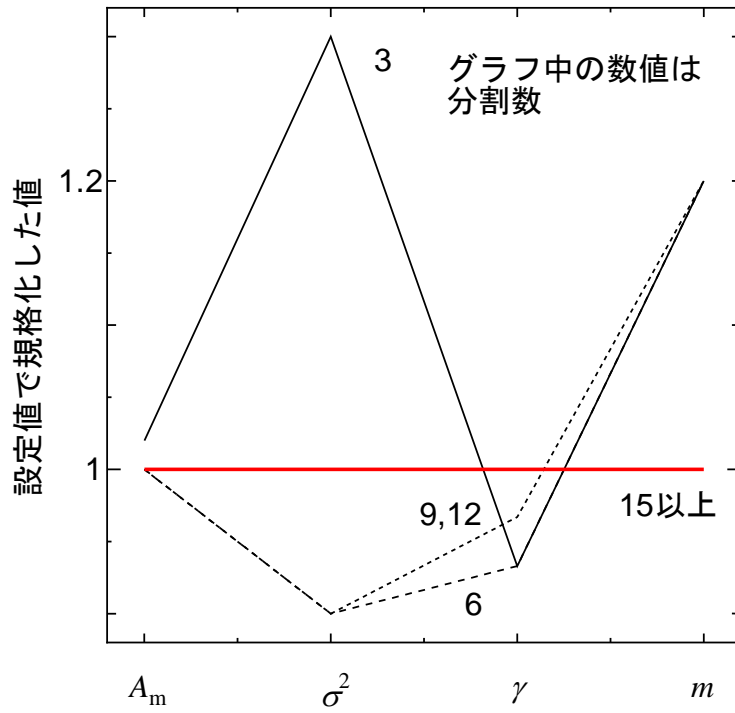


図 3.2 : モデルデータにおける規格化したパラメータの分散

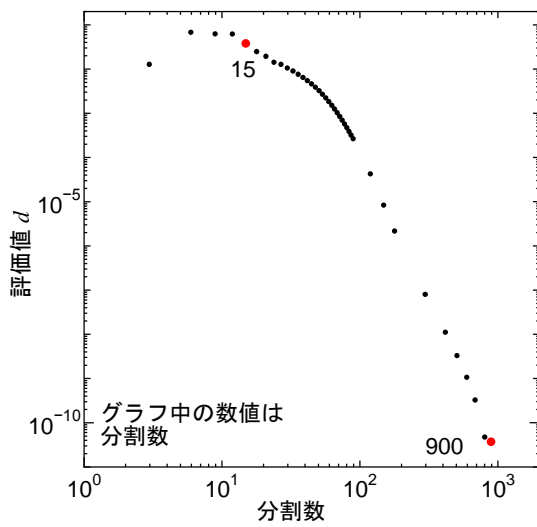


図 3.3 : モデルデータにおける
分割数-評価値特性

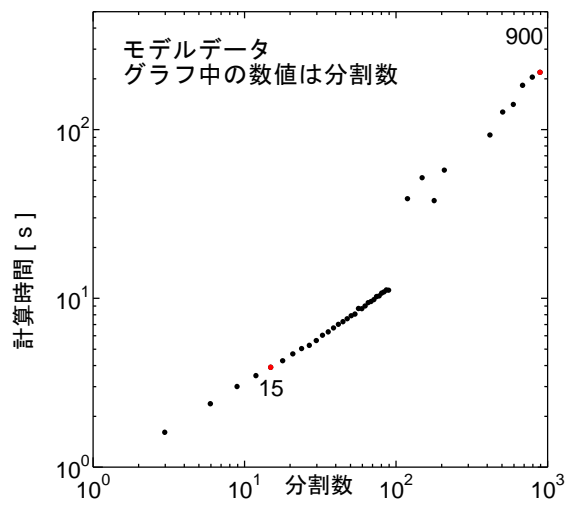


図 3.4 : モデルデータにおける
分割数とその際の計算時間

3.2 IBAD 法試料についての計算結果

IBAD 法試料において計算によって得られたパラメータを表 3.2 に、それらをグラフにしたものを図 3.5 に示す。また、計算したパラメータを後述する最良解によって規格化したパラメータの分散を図 3.6 に、分割数による評価値の変化を図 3.7 に示す。また、これらを計算した際の分割数毎の計算時間を図 3.8 に示す。

表 3.2 と図 3.5 更に、図 3.6 より分割数が 48 回以上の場合は計算結果によって得られるパラメータの値が同じになることが分かる。図 3.7 より評価値 d は分割数が 120 回までは減少傾向にあるが、僅かに上昇している。図 3.8 からは計算時間の増加が分かる。

表 3.2 : IBAD 法試料の計算における各分割数とその時に得られたパラメータ

	$A_m(\times 10^{11})$	$\sigma^2(\times 10^{-2})$	γ	m
3回	6.30	1.00	0.58	4.00
6回	6.30	1.20	0.62	4.00
9回	6.30	1.30	0.60	4.00
15回	6.30	1.30	0.62	4.00
27回	6.30	1.30	0.64	4.00
45回	6.30	1.30	0.66	4.00
48回	6.30	1.40	0.68	4.00

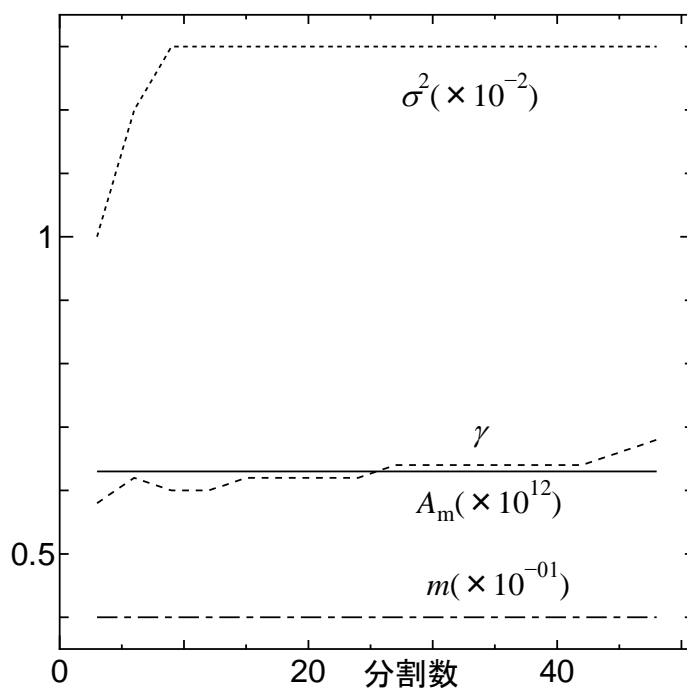


図 3.5 : IBAD 法試料の計算における各分割数とその時に得られたパラメータ

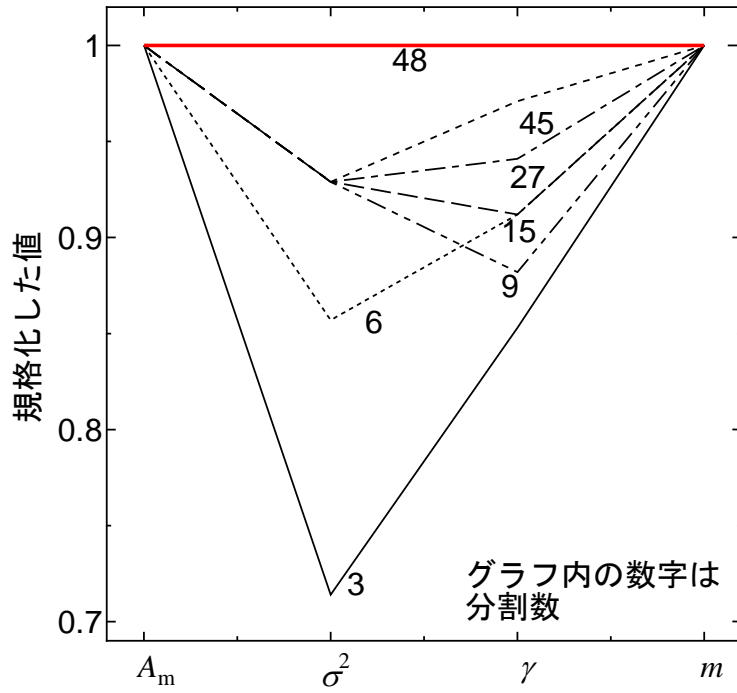


図 3.6 : IBAF 法試料における規格化したパラメータの分散

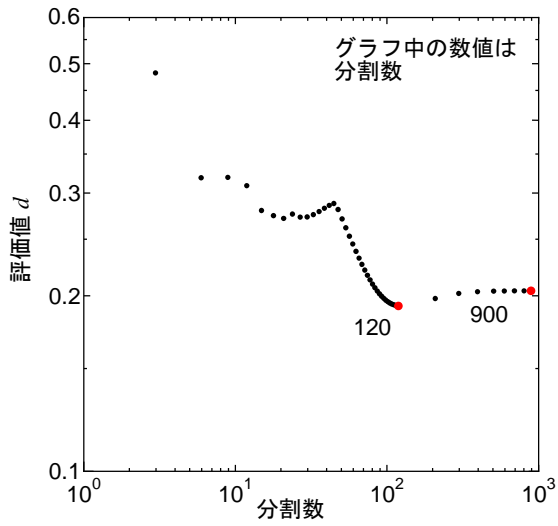


図 3.7 : IBAF 法試料における
分割数-評価値特性

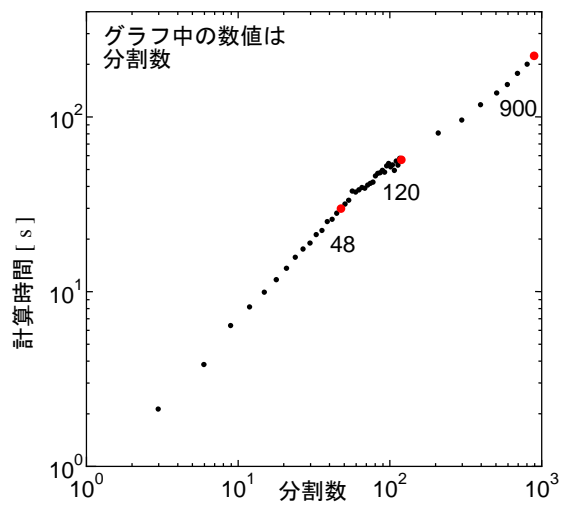


図 3.8 : IBAF 法試料における
分割数とその際の計算時間

3.3 PLD 法試料についての計算結果

PLD 法試料について計算によって得られたパラメータを表 3.3 に示し、それらをグラフにしたものを図 3.9 に示す。また、計算したパラメータを後述する最良解によって規格化したパラメータの分散を図 3.10 に、分割数による評価値の変化を図 3.11 に示す。また、これらを計算した際の分割数毎の計算時間を図 3.12 に示す。

表 3.3 と図 3.9 更に、図 3.10 より分割数が 21 回未満の時はパラメータがばらつくが分割数が 21 回以上の場合には計算結果によって得られるパラメータの値が同じになることが分かる。図 3.11 より評価値 d は分割数が 3 回から 18 回までは上昇し 42 回に極小をとっていることが分かる。また、図 3.12 よりこれら分割数が 21 回、分割数 42 回の時の計算時間は分割数 900 回の計算時間より大幅に短いことが分かる。

表 3.3 : PLD 法試料の計算における各分割数とその時に得られたパラメータ

	$A_m(\times 10^{11})$	$\sigma^2(\times 10^{-2})$	γ	m
3回	1.58	1.30	0.60	4.00
9回	1.00	0.90	0.62	4.00
18回	1.00	0.90	0.60	3.80
21回以上	1.00	1.00	0.64	3.60

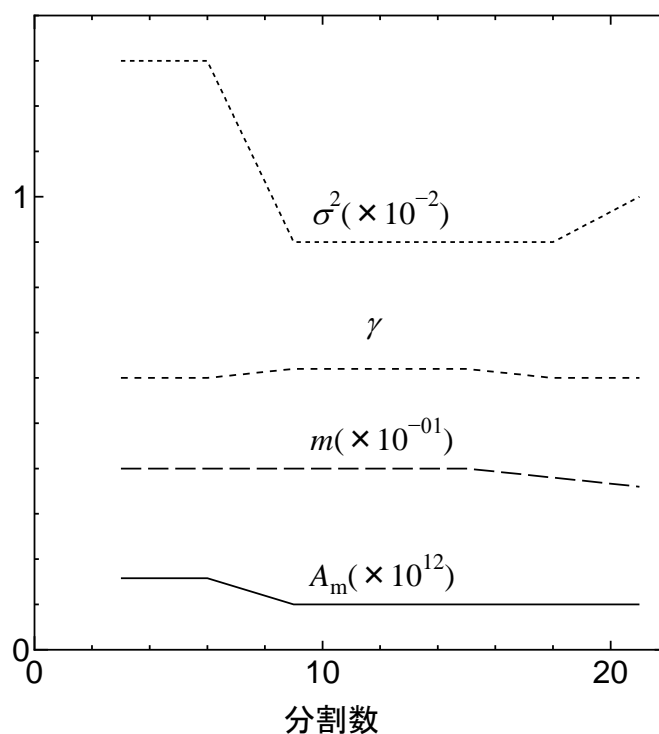


図 3.9 : IBAD 法試料の計算における各分割数とその時に得られたパラメータ

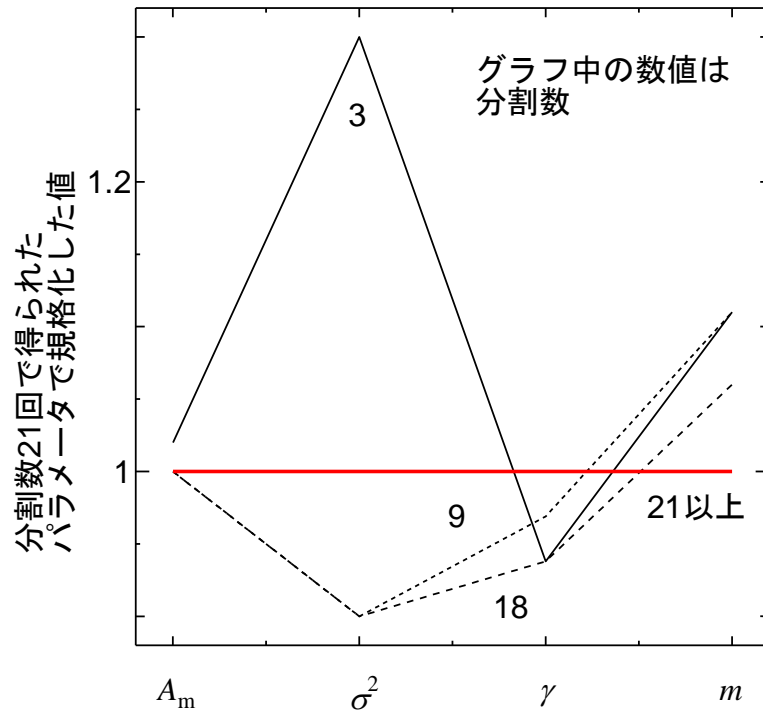


図 3.10 : PLD 法試料における規格化したパラメータの分散

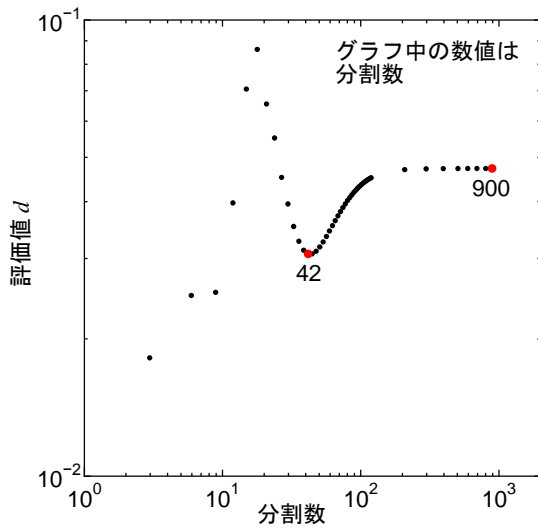


図 3.11 : PLD 法試料における
分割数-評価値特性

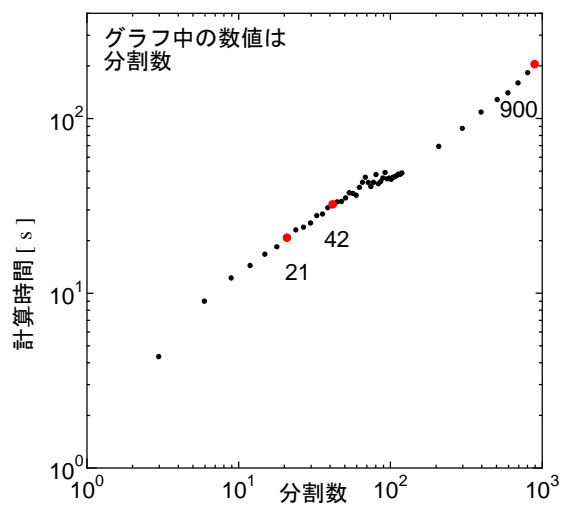


図 3.12 : PLD 法試料における
分割数とその際の計算時間

第4章 考察と結論

4.1 パラメータについての考察

これまで同様の計算を行う際には、分割数を900回で行っていた。しかし、表 3.1 と図 3.1 を見ると分割数が 15 回で分割数が 900 回の場合と同じパラメータを推定することができている。これより、分割数が 900 回も必要ではなく、更に少ない分割数で同様の結果を得られるのではないかと考えられる。表 4.1 にモデルデータを用いて計算した際に得られたパラメータを示す。

今回は分割数 900 回のパラメータを基準に、10 %を誤差と見なすこととすると IBAD 法試料では分割数 15 回で、PLD 法試料では分割数 18 回で十分な結果を得られていると考えられる。IBAD 法試料と PLD 法試料において推定された実際のパラメータを表 4.2 に表す。表 4.2 より分割数 18 回で全てのパラメータが分割数 900 回のパラメータの誤差 10 %以内に収まっている。したがってパラメータに着目した際の十分な精度が得られる分割数は 18 回であると考えられる。実際に IBAD 法試料と PLD 法試料それぞれを 18 回の積分で得られたパラメータから作成した $E-J$ 特性を図 4.1、図 4.2 に示す。これらを見ると十分にその特性が得られていることが分かる。

以上より、パラメータに着目した際の十分な精度が得られる分割数は 18 回であると考えられる。

表 4.1：モデルデータにおいて推定されたパラメータ

	$A_m(\times 10^{11})$	$\sigma^2(\times 10^{-2})$	γ	m
モデル	1.00	1.00	0.60	3.00
15回	1.00	1.00	0.60	3.00
900回	1.00	1.00	0.60	3.00

表 4.2: IBAD 法試料と PLD 法試料における各分割数において推定されたパラメータ

試料	分割数	$A_m(\times 10^{11})$	$\sigma^2(\times 10^{-2})$	γ	m
IBAD 法試料	18 回	6.30	1.30	0.64	4.00
	48 回	6.30	1.40	0.68	4.00
	900 回	6.30	1.40	0.68	4.00
PLD 法試料	18 回	1.00	0.90	0.60	3.8
	21 回	1.00	0.10	0.64	3.6
	900 回	1.00	0.10	0.64	3.6

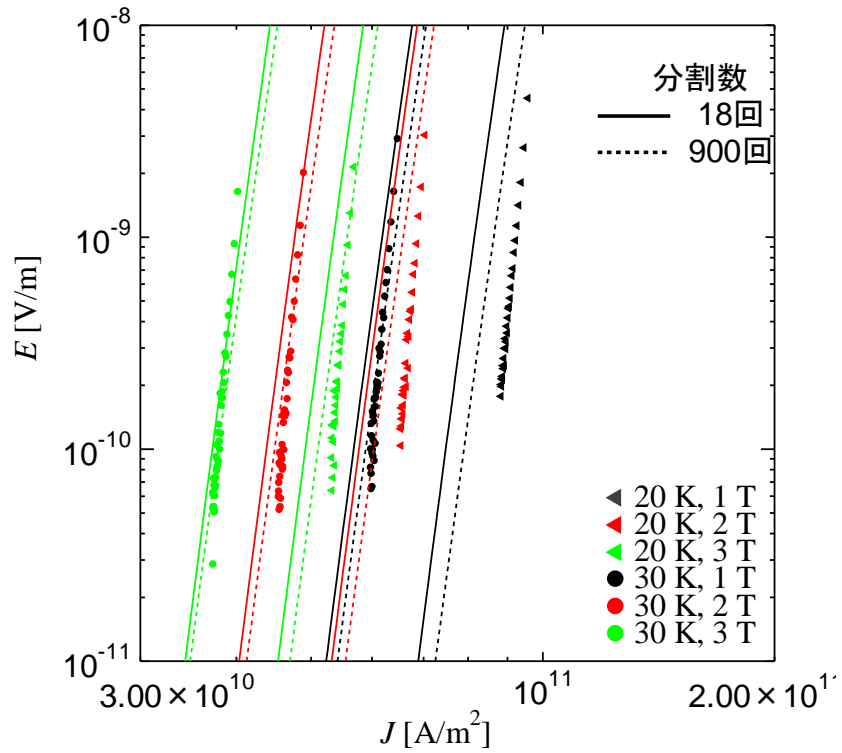


図 4.1 : IBAD 法試料において分割数 18 回と 900 回から作成した E - J 特性

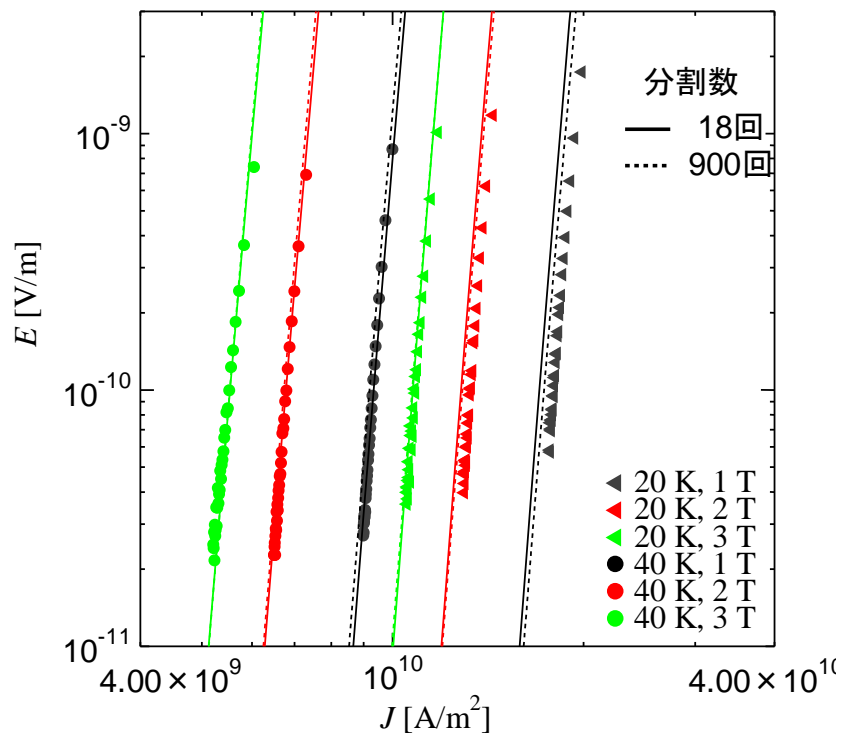


図 4.2 : PLD 法試料において分割数 18 回と 900 回から作成した E - J 特性

4.2 評価値 d についての考察

図 3.2 を見ると分かるように、モデルデータにおいては分割数が増加するに従って d の値は良くなっていった。しかし、今回の計算では最良解(以下、1st)の次の解(以下、2nd)の d はおよそ 5.0×10^{-2} から 1.5×10^{-2} の範囲に収まっていた。表 4.3 に分割数と評価値の関係を示す。これと比較すると、分割数が 60 回以上において評価値が 1 桁以上良くなっている為、分割数が 900 回も必要無く 60 回が最適だと考えられる。

実験データの場合は、分割数が 1 桁程度の値の場合は誤差が非常に大きいと考えられるため考慮しないものとする。分割数 120 回と 42 回で d が極小値を取っている。これらの分割数と評価値の関係を表 4.4 に示す。また、図 4.3、図 4.4 に IBAD 法試料と PLD 法試料それぞれを分割数 120 回と 42 回で分割した際の E - J 特性を示す。これらと、図 4.1、図 4.2 と比較すると求められた E - J 特性の精度が高いことが分かる。

しかし、これらのような d の値を予測するのは図 3.5 と図 3.8 を見ると分かるように非常に困難なことが伺える。これは超伝導体の製造方法や E - J 特性を計測した実験環境により d がモデルデータとは異なる特性を示すためだと考えられる。実験データが 2 つのみである本研究では全ての実験データにおいて最良である単一の分割数を結論づけることは不可能であり、実験データ毎に改めて分割数毎の d の値を計算することが必要ではないかと考える。

しかし、図 3.5 と図 3.8 より分割数 150 未満で d が極小値を取る可能性が高いと仮定すると、20 分程でその極小値を求めることができる。従って、高い精度で E - J 特性を求める場合は d を計算する値は十分あると考える。以上より、 d に着目した場合、モデルデータで十分な精度が得られる分割数は 60 回であり、実験データではそのデータごとに d を計算する必要があると考える。

表 4.3 : モデルデータにおける分割数と評価値の関係

分割数	1st	2nd
15	3.71×10^{-02}	4.35×10^{-02}
60	1.80×10^{-03}	1.79×10^{-02}
900	3.62×10^{-11}	1.86×10^{-02}

表 4.4 : IBAD 法試料と PLD 法試料における分割数と評価値の関係

試料	分割数	1st	2nd
IBAD 法試料	81 回	2.08×10^{-1}	2.15×10^{-1}
	120 回	1.91×10^{-1}	2.04×10^{-1}
	900 回	2.03×10^{-1}	2.24×10^{-1}
PLD 法試料	42 回	3.06×10^{-2}	6.06×10^{-2}
	81 回	4.01×10^{-2}	5.92×10^{-2}
	900 回	4.71×10^{-2}	6.39×10^{-2}

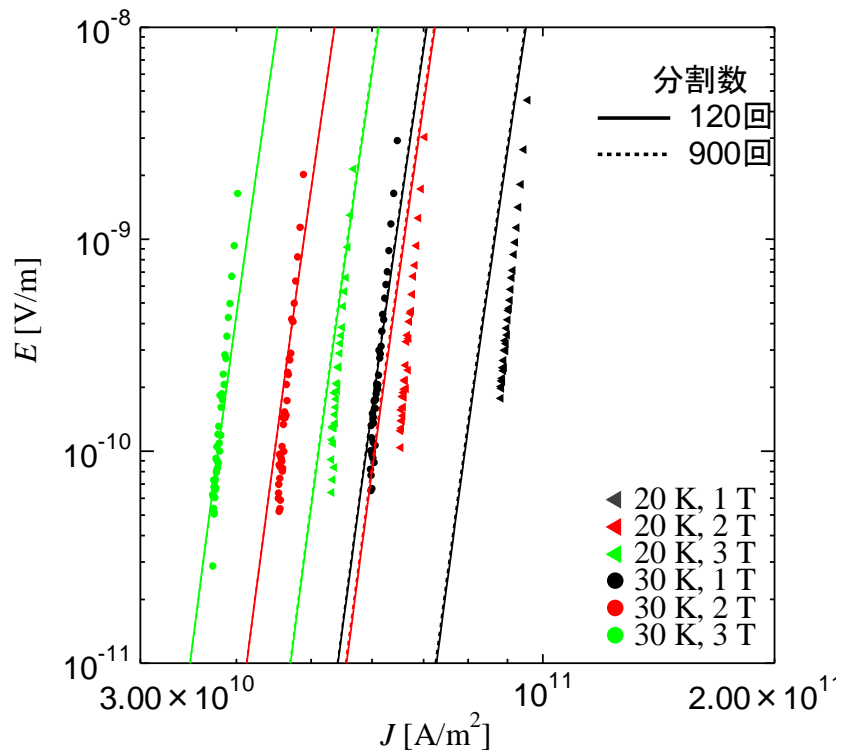


図 4.3 : IBAD 法試料の分割数 120 回と 900 回から作成した E - J 特性

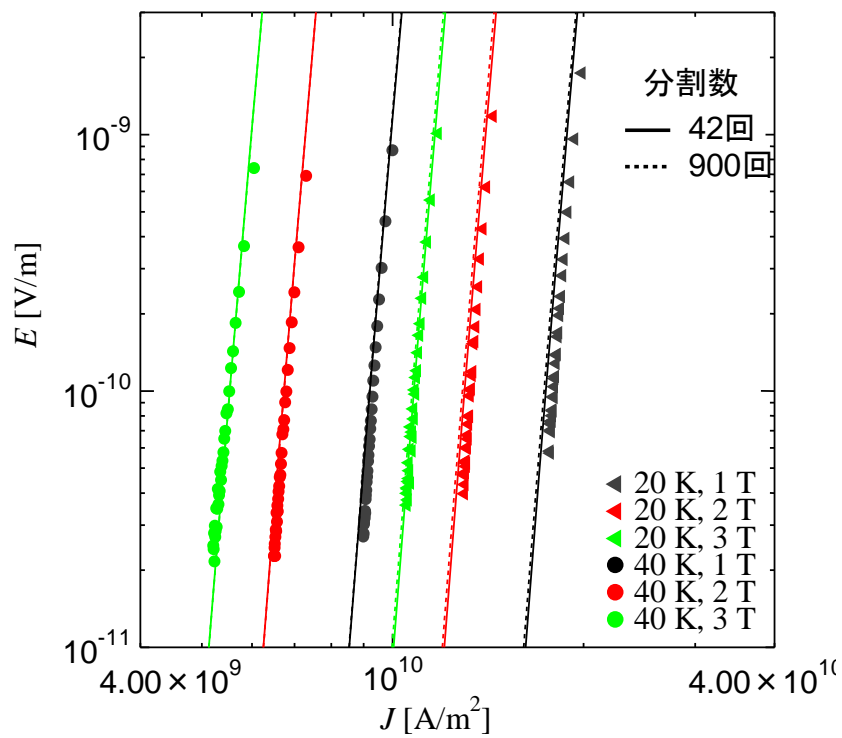


図 4.4 : PLD 法試料の分割数 42 回と 900 回から作成した E - J 特性

4.3 計算時間についての考察

4.1 節と 4.2 節で分割数を前年度までより低く抑えることができると述べた。これにより 図 3.3、図 3.6、図 3.9 の通り、計算時間を大幅に短縮することができる。表 4.5 にモデルデータ、IBAD 法試料、PLD 法試料の分割数とその時の実際の計算時間、更に分割数 900 回の計算時間を 1 とした時のそれぞれの時間を規格化した値をまとめる。これらから、4.1 節で述べた考えによる分割数であればこれまでの 50 分の 1 から 14 分の 1 の計算時間で求められ、4.2 節で述べた考えによる分割数であっても 14 分の 1 から 4 分の 1 程度の計算時間で求められることになる。

これに対して 4.1 節で述べた考えでは求められるパラメータの値は誤差の範囲内の精度で求められる。また、4.2 節で述べた考えでは求められる評価値 d の値に関してはむしろこれまでより良い値が求められている。

従って、計算時間に着目した際は 4.1 節と 4.2 節のどちらの考え方であっても適切な分割数であると考ええる。

表 4.5 : 分割数とその時の計算時間の値ならびに時間を規格化した値

データ	分割数	時間[s]	分割数 900 回の計算時間を 1 とした時の それぞれの時間を規格化した値
モデルデータ	18 回	4.2	0.02
	60 回	8.6	0.04
	900 回	217.0	1.00
IBAD 法試料	18 回	11.6	0.05
	120 回	56.5	0.25
	900 回	222.4	1.00
PLD 法試料	18 回	18.2	0.07
	42 回	32.0	0.13
	900 回	253.4	1.00

第 5 章 まとめ

事前にピンニングパラメータを設定して作成したモデルデータと、IBAD 法試料と PLD 法試料の 2 つの実験データ計 3 つについて、メッシュ法を用いて磁束クリープ・フローモデルにおける、超伝導体のピンニングパラメータの推定を行った。モデルデータと実験データのそれぞれにおいて、分割数をこれまでの 50 分の 1 程度で同じパラメータを推定することができ、10 分の 1 程度でより精度の高い計算ができ、最低でもこれまでの 4 倍早く、最高で 50 倍以上早く計算結果を求められることができたことがわかった。

謝辞

本研究を行うにあたり大変有意義な御指導、助言を頂いただけでなく、就職活動等にも親身に相談に乗って頂いた小田部荘司教授に深く感謝いたします。また、様々な助言や指導、ご協力をして頂いた木内勝准教授に深く感謝いたします。また、今回取り扱ったプログラムと評価関数の作成者である増田嘉道先輩には本論文作成において徹頭徹尾お力をお借りしました。この場をお借り致しまして、お礼申し上げます。

また、身体的な要因などから欠席等が多かった私に有意義な助言や激励の言葉などをかけてくださった上、公私共々お世話になりました小田部研究室、木内研究室内の皆様に深く感謝いたします。

最後に、支えて下さった家族に感謝いたします。

参考文献

- [1] K. Yamafuji, T. Fujiyoshi, K. Toko, and T. Matsushita: *Physica C* 159 (1989) 743.
- [2] T. Matsushita, T. Fujiyoshi, K. Toko and K. Yamafuji, *Appl. Phys. Lett.* 56 (1990) 2039
- [3] Y. Kamihara, T. Watanabe, M. Hirano and H. Hosono, *Journal of the American Chemical Society*, 130 (2008) 3296
- [4] T. Matsushita: *Physica C* 217 (1993) 461
- [5] 増田嘉道(2014) 「最急降下法を用いた超伝導体の電界-電流密度特性評価の検討」 九州工業大学情報工学部電子情報工学科卒業論文
- [6] 瓜生幸太郎(2011) 「遺伝的アルゴリズムを用いた磁束クリープ・フローモデルのパラメータ解析における評価方法の検討」 九州工業大学情報工学部電子情報工学科卒業論文
- [7] 石橋知裕(2011) 「CUDAによる高速な磁束クリープ・フローモデルの数値計算と性能評価」 九州工業大学情報工学部電子情報工学科卒業論文
- [8] 永水隼人 (2013) 「BaHfO₃ ピンを導入したPLD法GdBa₂Cu₃O_x超電導線材の臨界電流密度特性」 九州工業大学修士論文
- [9] 松下 照男, 「磁束ピンニングと電磁現象」, 産業図書, 1994 年