

平成 30 年度
学士学位論文

時間依存 Ginzburg-Landau 方程式を用いた
様々なピン形状における超伝導体の臨界電流密度解析

上地 和典
(学籍番号:15232022)

九州工業大学 情報工学部
電子情報工学科

指導教員:小田部 荘司 教授
2019 年 3 月 1 日

目次

第 1 章 序論	- 1 -
1.1 はじめに	- 1 -
1.2 磁束ピンニング	- 1 -
1.3 (Time-Dependent)Ginzburg-Landau 方程式.....	- 3 -
1.3.1 Ginzburg-Landau(G-L)方程式.....	- 3 -
1.3.2 Time-Dependent G-L(TDGL)方程式.....	- 4 -
1.3.3 TDGL 方程式の簡易化.....	- 5 -
1.4 ピーク効果.....	- 9 -
1.5 本研究の目的.....	- 10 -
第 2 章 計算手法.....	- 11 -
2.1 計算条件	- 11 -
2.1.1 超伝導体の数値解析モデル.....	- 11 -
2.1.2 オーダパラメータ Ψ とスカラーポテンシャル V の初期条件.....	- 12 -
2.1.3 境界条件	- 12 -
2.2 ピンを導入した数値解析モデル	- 13 -
2.2.1 面状ピンモデル.....	- 14 -
2.2.2 円柱状ピンモデル.....	- 15 -
2.2.3 球状ピンモデル.....	- 17 -
2.2.4 組み合わせピンモデル	- 20 -
第 3 章 計算結果および考察	- 21 -
3.1 E - J 特性	- 21 -
3.1.1 面状ピンモデルでの E - J 特性.....	- 21 -
3.1.2 円柱状ピンモデルでの E - J 特性.....	- 23 -
3.1.3 球状ピンモデルでの E - J 特性.....	- 24 -
3.1.4 組み合わせピンモデルでの E - J 特性	- 25 -

3.2	<i>Jc-B</i> 特性	- 25 -
3.2.1	面状ピンモデルでの <i>Jc-B</i> 特性.....	- 25 -
3.2.2	円柱状ピンモデルでの <i>Jc-B</i> 特性.....	- 26 -
3.2.3	球状ピンモデルでの <i>Jc-B</i> 特性.....	- 28 -
3.2.4	組み合わせピンでの <i>Jc-B</i> 特性.....	- 29 -
3.2.5	<i>Jc-B</i> 特性の比較.....	- 30 -
第 4 章	まとめ.....	- 32 -
参考文献	- 33 -
謝辞	- 34 -

図目次

Fig. 1.1 磁束ピンニングの模式図	- 3 -
Fig. 1.2 各種超伝導体におけるピーク効果。	- 10 -
Fig. 2.1 超伝導体モデル	- 11 -
Fig. 2.2 面状ピンを 1 個導入した超伝導体の数値解析モデル	- 14 -
Fig. 2.3 面状ピンを 2 個導入した超伝導体の数値解析モデル	- 15 -
Fig. 2.4 円柱状ピンを 2 個導入した超伝導体の数値解析モデル	- 16 -
Fig. 2.5 円柱状ピンを 4 個導入した超伝導体の数値解析モデル	- 17 -
Fig. 2.6 球状ピンを 4 個導入した超伝導体の数値解析モデル	- 18 -
Fig. 2.7 球状ピンを 8 個導入した超伝導体の数値解析モデル	- 19 -
Fig. 2.8 異なる形状のピンを導入した超伝導体の数値解析モデル	- 20 -
Fig. 3.1 面状ピンを 1 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性	- 22 -
Fig. 3.2 面状ピンを 2 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性	- 22 -
Fig. 3.3 円柱状ピンを 2 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性	- 23 -
Fig. 3.4 円柱状ピンを 4 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性	- 23 -
Fig. 3.5 球状ピンを 4 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性	- 24 -
Fig. 3.6 球状ピンを 8 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性	- 24 -
Fig. 3.7 異なる形状のピンを導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性	- 25 -
Fig. 3.8 面状ピンを導入した超伝導体モデルにおける J_c - B 特性	- 26 -
Fig. 3.9 円柱状ピンを導入した超伝導体モデルにおける J_c - B 特性	- 28 -
Fig. 3.10 球状ピンを導入した超伝導体モデルにおける J_c - B 特性	- 29 -
Fig. 3.11 組み合わせピンモデルにおける J_c - B 特性	- 30 -
Fig. 3.12 異なる形状のピンを導入した超伝導体モデルにおける J_c - B 特性	- 31 -

表目次

Table. 2.1	面状ピンのパラメータ(ピン個数が 1 個のモデル).....	- 14 -
Table. 2.2	面状ピンのパラメータ(ピンの個数が 2 個のモデル).....	- 15 -
Table. 2.3	円柱状ピンのパラメータ.....	- 16 -
Table. 2.4	円柱状ピンのパラメータ(ピンの個数が 4 個のモデル).....	- 17 -
Table. 2.5	球状ピンのパラメータ(ピン個数が 4 個のモデル).....	- 18 -
Table. 2.6	球状ピンのパラメータ(ピン個数が 8 個のモデル).....	- 19 -
Table. 2.7	組み合わせピンモデルの各ピンのパラメータ.....	- 20 -

第1章 序論

1.1 はじめに

1911年にオランダの Kamerlingh Onnes が液体ヘリウムを用いて極低温下で水銀の抵抗が 0 になることを発見した。その後、種々の金属においても、同様の現象が発見された。これは超伝導現象と呼ばれ、また、この現象を起こす金属は超伝導体と呼ばれた。超伝導体は電気抵抗が 0 である性質によって様々な工学的な応用が期待されたが、発見された多くの超伝導体において、その性質はわずかな磁界や温度によって失われてしまい、応用は難しかった。これらの超伝導現象を示さなくなる磁界、温度をそれぞれ臨界磁界 B_c 、臨界温度 T_c と呼ぶ。その後、超伝導現象の発現機構や性質に関する研究が進められ、1933年に W. Meissner と R. Ochsenfeld によって、超伝導体により本質的な性質として、完全反磁性を持つこと(マイスナー効果)が実験的に示された。さらに 1957年には J. Bardeen と L. N. Cooper および J. R. Shrieffer らにより、BCS 理論が提唱され超伝導発現機構における基本的な理解が与えられた。BCS 理論によると T_c は 30 K を超えないと予想されていた。しかし、1986年に J. G. Bednorz と K. A. Müller らが $(La, Ba)_2CuO_{4-\delta}$ を用いた実験結果を発表し、30 K を超える温度で超伝導現象が発現する可能性が示された。このような高い T_c を持つ超伝導体は高温超伝導体と呼ばれる。この発表以降、世界各国で高温超伝導体を探索する動きが活発化し、翌年には C. W. Chu らによって、液体窒素の沸点である 77.3 K を超える $T_c = 93$ K の $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ が発見された。さらに1988年には、H. Maeda らによって $T_c = 100$ K を超える $Bi_2Sr_2Ca_2Cu_3O_{10-\delta}$ が発見されている。これらの高温超伝導体は液体ヘリウムに比べて安価な液体窒素や冷凍機などで超伝導状態となるため、様々な機器への応用の可能性や冷却コストの低減などの点から大きな注目を浴び、今日も研究が続けられている。超伝導体の性能を表すもう 1 つのパラメータとして電気抵抗 0 で流せる最大の電流密度である臨界電流密度 J_c が存在する。 J_c を超えて電流を流すと超伝導体であっても電気抵抗が発生する。すなわち、より高い J_c を持つ超伝導体はより大きい電流を流すことが出来る。よって、超伝導体により高い J_c を持つことが工業的な応用において重要である。このために、現在では J_c を増加させる様々な材料研究が行われており、本研究はその一端を担おうとするものである。

1.2 磁束ピンニング

超伝導体は、外部磁界を印加した状況下で、電流を流した場合の振る舞いの違いにより、第 1 種超伝導体と第 2 種超伝導体に区別される。第 1 種超伝導体は、外部磁界を全

く与えないとき、 T_c 以下の温度において超伝導状態を保ち、完全反磁性を示す。しかし、これに外部磁界を徐々に大きくしながら与えていくと、ある大きさの外部磁界において完全反磁性が失われ、その超伝導状態が破壊されてしまう。この磁界が前述の B_c である。一方で第2種超伝導体は、ある大きさの磁界までは第1種超伝導体と同様に完全反磁性を示すが、その磁界を超えると第1種超伝導体とは異なり、一定の磁束線を侵入させて超伝導状態を維持する。磁束線が侵入した領域は常伝導状態となるが、全体としては超伝導状態のように振る舞う。この状態を混合状態と呼ぶ。更に与える外部磁界を大きくしていくと超伝導状態が破壊される。第2種超伝導体の完全反磁性を示さなくなる大きさの外部磁界を上部臨界磁界 B_{c1} 、超伝導状態が破壊される大きさの外部磁界を下部臨界磁界 B_{c2} と呼ぶ。まとめると、第1種超伝導体は、 B_c を境界として常伝導状態と超伝導状態の1つの状態を持ち、第2種超伝導体は B_{c1} および B_{c2} を境界として常伝導状態、混合状態、超伝導状態の3つの状態を持つ。

現在、発見されている超伝導体においては、第2種超伝導体の B_{c2} は第1種超伝導体の B_c に対して非常に大きいことが知られている。このため、一般的に、工学的な応用には第2種超伝導体が用いられる。第2種超伝導体は、混合状態において、超伝導体内には磁束線が侵入している(この磁束線の磁束密度を \mathbf{B} とする)。この磁束線には超伝導体に流す電流 \mathbf{J} (この電流密度を \mathbf{J} とする)によって、Lorentz力 \mathbf{F}_L が与えられる。この \mathbf{F}_L は、

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

と表すことが出来る。また、この \mathbf{F}_L によって磁束線が速度 \mathbf{v} で運動した場合、Josephsonの式から、誘導起電力

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} \quad (1.2)$$

が生じる。この \mathbf{E} は、 \mathbf{J} と同じ向きに生じるので、

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} > 0 \quad (1.3)$$

こうした状態が定常的に続く為には、この誘導起電力に見合った損失が発生しなければならない。すなわち、この \mathbf{E} は超伝導体に対して Ohmic な損失をもたらし、超伝導状態を破壊する要因となる。しかし、第2種超伝導体には磁束の運動を止める($\mathbf{v} = 0$)作用があり、この作用を磁束ピンニングと呼ぶ。磁束ピンニングを引き起こすのは第2種超伝導体に含まれる様々な欠陥や不均質物質であり、これをピンニング・センターと呼ぶ。磁束ピンニングは \mathbf{F}_L がある臨界値を超えるまで磁束線の動きを止め、 \mathbf{E} による損失を生じさせないようにする。ここで、単位体積当たりのピンニング・センターが磁束線に与える力をピン力密度 \mathbf{F}_p とする。超伝導体に \mathbf{E} が生じ始める電流密度(すなわち、臨界電流密度 J_c である)の下では、磁束線に単位面積あたり、

$$F_L = J_c B \quad (1.4)$$

の Lorentz 力が働いており、これは \mathbf{F}_p と釣り合っているから、以下の関係が成り立つ。

$$J_c = \frac{F_p}{B} \quad (1.5)$$

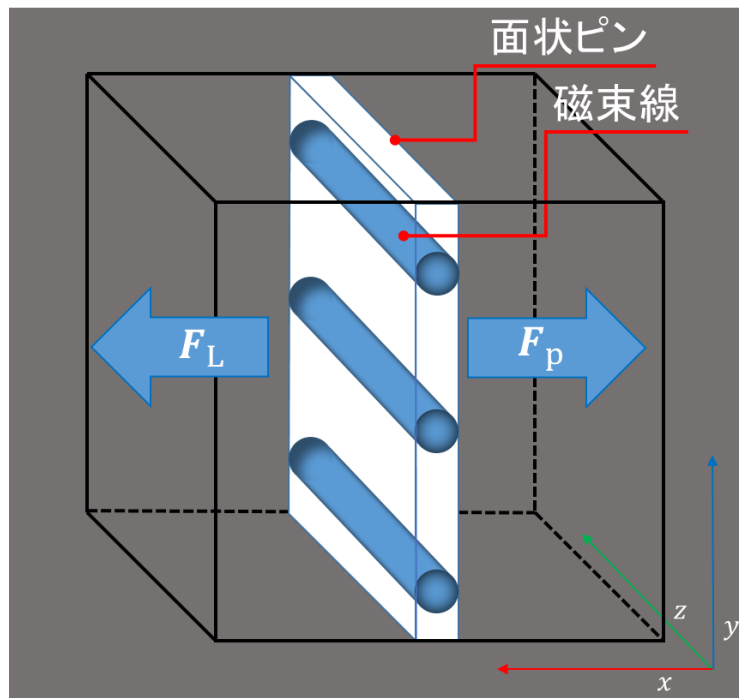


Fig. 1.1 磁束ピンニングの模式図

1.3 (Time-Dependent)Ginzburg-Landau 方程式

ここでは、超伝導体の数値解析に用いた時間依存 Ginzburg-Landau 方程式について説明する。

1.3.1 Ginzburg-Landau(G-L)方程式

Ginzburg-Landau(G-L)理論は、1950年に V. L. Ginzburg と L. D. Landau によって提唱された超伝導現象を説明する現象論である。G-L 理論は磁界と超伝導が共存する場合の相転移を取り扱ったもので、特に第 2 種超伝導体の磁気特性を良く記述することが知られている。以下では、G-L 理論を成り立たせる仮定とそれによって求められる方程式を説明する。

G-L 理論では、まず超伝導状態の秩序の程度を表す量として複素数であるオーダパラメータ $\Psi = |\Psi|\exp(i\varphi)$ を定義する。そして Ψ は、

$$|\Psi|^2 \propto n_s \quad (1.6)$$

の関係を満たすと仮定する。ここで、 n_s は超伝導電子密度である。超伝導状態の自由エネルギー E_s は n_s に依存しているから、(1.6)式より、 $|\Psi|^2$ の関数である。よって、 E_s は $|\Psi|^2$ のべき展開で表すことが出来る。

$$E_s = E_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 \quad (1.7)$$

ここで、 E_n は常伝導状態の自由エネルギー、 α および β はそれぞれべき展開した際の1次と2次の係数であり、 $T < T_c$ では $\alpha < 0, \beta > 0$ である。2次の項までの展開であるのは $|\Psi|^2$ が転移点近傍($T \cong T_c$)において十分に小さいためである。

次に、磁界の存在が Ψ の空間的变化に寄与することを考慮し、(1.7)式に磁界のエネルギー密度と運動エネルギー密度を加算する。

$$E_s = E_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})\Psi|^2 \quad (1.8)$$

ここで、 μ_0 は真空中の透磁率、 \mathbf{A} はベクトルポテンシャル、 m^* は超伝導電子の質量、 \hbar はプランク定数を 2π で除算したもの、 e^* は超伝導電子の電荷量、 i は虚数単位である。

Ψ と \mathbf{A} は(1.8)式の E_s を最小とするように決定される。よって Ψ の共役複素数 Ψ^* と \mathbf{A} について変分法を適用する。

$$\frac{\delta E_s}{\delta \Psi^*} = \frac{\partial E_s}{\partial \Psi^*} - \left[\nabla \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \nabla \Psi^*} \right] = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\delta E_s}{\delta \mathbf{A}} = \frac{\partial E_s}{\partial \mathbf{A}} - \left[\nabla \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \nabla \mathbf{A}} \right] = 0 \quad (1.10)$$

(1.9)式と(1.10)式をそれぞれ解くと、以下の2式が得られる。

$$\frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (1.11)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{i\hbar e^*}{2m^*}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*}|\Psi|^2\mathbf{A} \quad (1.12)$$

ここで、ゲージ変換には Coulomb ゲージ $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ を用いた。また、条件として超伝導体表面を横切って電流が流れないことを仮定した。この(1.11)、(1.12)式を G-L 方程式と呼ぶ。

1.3.2 Time-Dependent G-L(TDGL)方程式

G-L 方程式は時間依存性を持たないため、時定数を導入して時間依存性を持った方程式に発展させる。これを Time-Dependent G-L(TDGL)方程式と呼ぶ。

Ψ と \mathbf{A} の時定数をそれぞれ γ, ν とおくと、(1.9)式および(1.10)式は以下のように時間発展する形に書き換えられる。

$$\frac{\delta E_s}{\delta \Psi^*} = \frac{\partial E_s}{\partial \Psi^*} - \left[\nabla \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \nabla \Psi^*} \right] = -\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1.13)$$

$$\frac{\delta E_s}{\delta \mathbf{A}} = \frac{\partial E_s}{\partial \mathbf{A}} - \left[\nabla \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \nabla \mathbf{A}} \right] = -\nu \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.14)$$

これに以下のゲージ変換を与える。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \Psi}{\partial t} + ie^* V \Psi \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \quad (1.16)$$

ここで、 V はスカラーポテンシャルである。(1.15)式および(1.16)式をそれぞれ(1.13)式、(1.14)式に代入して解くと、

$$\gamma \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + ie^* V \Psi \right) + \frac{1}{2m^*} (-i\hbar \nabla + e^* \mathbf{A})^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (1.17)$$

$$v \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} = 0 \quad (1.18)$$

が得られる。この(1.17)式、(1.18)式を解くことによって超伝導体の数値解析を行う。

1.3.3 TDGL 方程式の簡易化

(1.17)式、(1.18)式をそのままコンピュータ上で解くことは困難であるため、細線近似と規格化という2つの簡易化を行う。

細線近似では、 \mathbf{A} が外部磁界 \mathbf{B} にのみ依存すると仮定する。本研究の数値解析では、 \mathbf{B} は時間に対して一定に与えるから \mathbf{A} も時間に対して一定となる。よって(1.18)式左辺第1項の時間偏微分が0となる。

次に(1.17)式、(1.18)式に対して規格化を行う。熱力学的臨界磁界を H_c として、超伝導体のコヒーレンス長 ξ と磁界侵入長 λ を以下のように表す。

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m^*|\alpha|}} \quad (1.19)$$

$$\lambda = \frac{e^* \mu_0 H_c}{\sqrt{m^*|\alpha|}} \quad (1.20)$$

また、以下の変換を定義する。

$$\xi \nabla \rightarrow \nabla \quad (1.21)$$

$$\frac{|\alpha|}{\gamma} t \rightarrow t \quad (1.22)$$

$$\frac{e^* \gamma}{|\alpha|} V \rightarrow V \quad (1.23)$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2}\mu_0 H_c} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \quad (1.24)$$

$$\left(\frac{\beta}{|\alpha|} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \rightarrow \Psi \quad (1.25)$$

(1.21)-(1.25)式の式変換を(1.17)式、(1.18)式に与えることによって規格化を行う。

まず(1.17)式の規格化を行う。(1.17)式の左辺第1項は、

$$\begin{aligned}
\gamma \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} + ie^* V \Psi \right) &\rightarrow \gamma \left[\frac{\partial}{\partial \left(\frac{\gamma}{|\alpha|} t \right)} \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi + ie^* \left(\frac{|\alpha|}{e^* \gamma} V \right) \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \right] \\
&= \gamma \left[\left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \left(\frac{\gamma}{|\alpha|} t \right)} + i \frac{|\alpha|}{\gamma} \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} V \Psi \right] \\
&= \gamma \left[\frac{1}{\gamma} |\alpha| \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} |\alpha| \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} i V \Psi \right] \\
&= |\alpha| \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial \Psi}{\partial t} + i V \Psi \right]
\end{aligned} \tag{1.26}$$

となる。(1.17)式の左辺第2項は、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m^*} (-i\hbar \nabla + e^* \mathbf{A})^2 \Psi \\
&\rightarrow \frac{1}{2m^*} \left(-i\hbar \frac{\nabla}{\xi} - e^* \frac{\sqrt{2}\mu_0 H_c}{\lambda} \mathbf{A} \right)^2 \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \\
&= \left(-i\hbar \frac{1}{\sqrt{2m^* \xi}} \nabla - e^* \frac{\sqrt{2}\mu_0 H_c}{\sqrt{2m^* \lambda}} \mathbf{A} \right)^2 \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \\
&= \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left(-i\hbar \frac{\sqrt{2m^* |\alpha|}}{\sqrt{2m^* \hbar}} \nabla - e^* \frac{\sqrt{2}\mu_0 H_c \sqrt{m^* |\alpha|}}{\sqrt{2m^* e^* \mu_0 H_c}} \mathbf{A} \right)^2 \Psi \\
&= |\alpha| \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} (-i\nabla - \mathbf{A})^2 \Psi
\end{aligned} \tag{1.27}$$

となる。(1.17)式の左辺第3項は、

$$\alpha \Psi \rightarrow \alpha \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \tag{1.28}$$

となる。(1.17)式の左辺第4項は、

$$\begin{aligned}
\beta|\Psi|^2\Psi &\rightarrow \beta \left| \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \right|^2 \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \\
&= |\alpha| \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} |\Psi|^2\Psi
\end{aligned} \tag{1.29}$$

(1.26)-(1.29)式をまとめる。(1.28)式右辺の α は負であるから、

$$\alpha \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\partial\Psi}{\partial t} + iV\Psi + (-i\nabla - \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi \right] = 0 \tag{1.30}$$

となる。さらに、(1.30)式の両辺を $\alpha(|\alpha|/\beta)^{1/2}$ で除算すると、

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + iV\Psi + (-i\nabla - \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0 \tag{1.31}$$

となる。(1.31)式は超伝導領域のオーダパラメータ Ψ を記述する。続いて(1.18)式の規格化を行う。(1.18)式の左辺第1項は、

$$\begin{aligned}
\nu\nabla V &\rightarrow \nu \frac{1}{\xi} \nabla \frac{|\alpha|}{e^*\gamma} V \\
&= \frac{|\alpha|}{\xi e^*\gamma} \nu\nabla V \\
&= \frac{\sqrt{2m^*|\alpha|}}{\hbar} \cdot \frac{|\alpha|}{e^*\gamma} \nu\nabla V
\end{aligned} \tag{1.32}$$

となる。(1.18)式の左辺第2項は、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &\rightarrow \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{\xi} \nabla \times \frac{1}{\xi} \nabla \times \frac{\sqrt{2}\mu_0 H_c}{\lambda} \mathbf{A} \\
&= \frac{\sqrt{2}H_c}{\xi^2 \lambda} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\
&= \frac{2m^*|\alpha|}{\hbar^2} \cdot \frac{\sqrt{m^*|\alpha|}}{e^*\mu_0 H_c} \cdot \sqrt{2}H_c \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\
&= \frac{2\sqrt{2}m^*|\alpha|\sqrt{m^*|\alpha|}}{\hbar^2 e^*\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{1.33}$$

となる。(1.18)式の左辺第3項は、

$$\begin{aligned}
& \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \\
& \rightarrow \frac{i\hbar e^*}{2m^*} \left\{ \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi^* \frac{1}{\xi} \nabla \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi - \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \frac{1}{\xi} \nabla \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi^* \right\} \\
& = \frac{i\hbar e^*}{2m^*} \cdot \frac{|\alpha|}{\beta} \cdot \frac{1}{\xi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \\
& = \frac{i\hbar e^*}{2m^*} \cdot \frac{|\alpha|}{\beta} \cdot \frac{\sqrt{2m^*|\alpha|}}{\hbar} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \\
& = \frac{ie^*|\alpha|\sqrt{2m^*|\alpha|}}{2m^*\beta} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)
\end{aligned} \tag{1.34}$$

となる。(1.18)式の左辺第4項は、

$$\begin{aligned}
\frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} & \rightarrow \frac{e^{*2}}{m^*} \left| \left(\frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \right|^2 \frac{\sqrt{2}\mu_0 H_c}{\lambda} \mathbf{A} \\
& = \frac{e^{*2}}{m^*} \cdot \frac{|\alpha|}{\beta} \cdot \frac{\sqrt{2}\mu_0 H_c}{\lambda} |\Psi|^2 \mathbf{A} \\
& = \frac{e^{*2}}{m^*} \cdot \frac{|\alpha|}{\beta} \cdot \sqrt{2}\mu_0 H_c \cdot \frac{\sqrt{m^*|\alpha|}}{e^* \mu_0 H_c} |\Psi|^2 \mathbf{A} \\
& = \frac{e^*|\alpha|\sqrt{2m^*|\alpha|}}{m^*\beta} |\Psi|^2 \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{1.35}$$

となる。(1.32)-(1.35)式をまとめると、

$$\begin{aligned}
& \frac{2\sqrt{2}m^*|\alpha|\sqrt{m^*|\alpha|}}{\hbar^2 e^* \mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\
& = \frac{e^*|\alpha|\sqrt{2m^*|\alpha|}}{m^*\beta} \left\{ |\Psi|^2 \mathbf{A} - \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right\} - \frac{\sqrt{2}m^*|\alpha|}{\hbar} \cdot \frac{|\alpha|}{e^* \gamma} \nu \nabla \nabla
\end{aligned} \tag{1.36}$$

となる。(1.36)式の両辺を $|\alpha|\sqrt{2m^*|\alpha|}$ で除算すると、

$$\frac{2m^*}{\hbar^2 e^* \mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{e^*}{m^*\beta} \left\{ |\Psi|^2 \mathbf{A} - \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right\} - \frac{1}{\hbar e^* \gamma} \nu \nabla \nabla \tag{1.37}$$

が得られる。さらに、(1.37)式を簡単化するために以下の関係を用いる。

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \tag{1.38}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \tag{1.39}$$

ここで、 \mathbf{J} は超伝導体に流れる電流であり、(1.39)式は電流の発散を表す式である。(1.37)式の両辺で ∇ との内積を取ると、(1.38)式、(1.39)式から、

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla \cdot \left[\frac{e^*}{m^* \beta} \left\{ |\Psi|^2 \mathbf{A} - \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right\} - \frac{1}{\hbar e^* \gamma} v \nabla V \right] \\
&\Leftrightarrow \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) - \nabla \cdot (|\Psi|^2 \mathbf{A}) = -\frac{m^* \beta}{\hbar e^* \gamma} v \nabla^2 V \quad (1.40) \\
&\Leftrightarrow \sigma \nabla^2 V = \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) - \nabla \cdot (|\Psi|^2 \mathbf{A})
\end{aligned}$$

が得られる。ここで、

$$-\frac{m^* \beta}{\hbar e^* \gamma} v \rightarrow \sigma \quad (1.41)$$

とする。(1.40)式はスカラーポテンシャル V を記述する。本研究の数値解析では、(1.31)式および(1.40)式を解くことによって超伝導体の解析を行う。

1.4 ピーク効果

超伝導体における J_c は、理論上、外部磁界が増加するにつれて単調に減少するはずであるが、ある磁界の大きさにおいて J_c が局所的に大きく増大することがある。この現象をピーク効果(peak effect)という。金属系超伝導体や、銅酸化物超伝導体などの超伝導体で、このピーク効果が観測されている。ここで、(1.19)式と(1.20)式の比で表される G-L パラメータ

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \quad (1.42)$$

が十分小さい超伝導体は、上部臨界磁界 B_{c2} 近傍において J_c のピークが表れることが経験的に知られている。そして、 κ がそこから大きくなるにつれて J_c のピークは相対的に低磁界側に移動する。特に κ が非常に大きい銅酸化物超伝導体では、かなり低い磁界で J_c のピークが現れる。これを特にフィッシュ・テール効果という (Fig. 1.2 参照) [2, 11, 12, 13]。このようなピーク効果が発現する機構には諸説あるが、中でも「マッチング機構」によってピーク効果を説明する説においては、ピンが複数ある状況下においてピン間隔と磁束密度に依存する磁束線格子間隔が一致することによって、磁束に対してピンニング力を発揮するピンの有効体積がある外部磁界の値において局所的に上昇し、その結果ピンニング効果が強く発揮されることで J_c - B 特性にピークが表れるとしている。

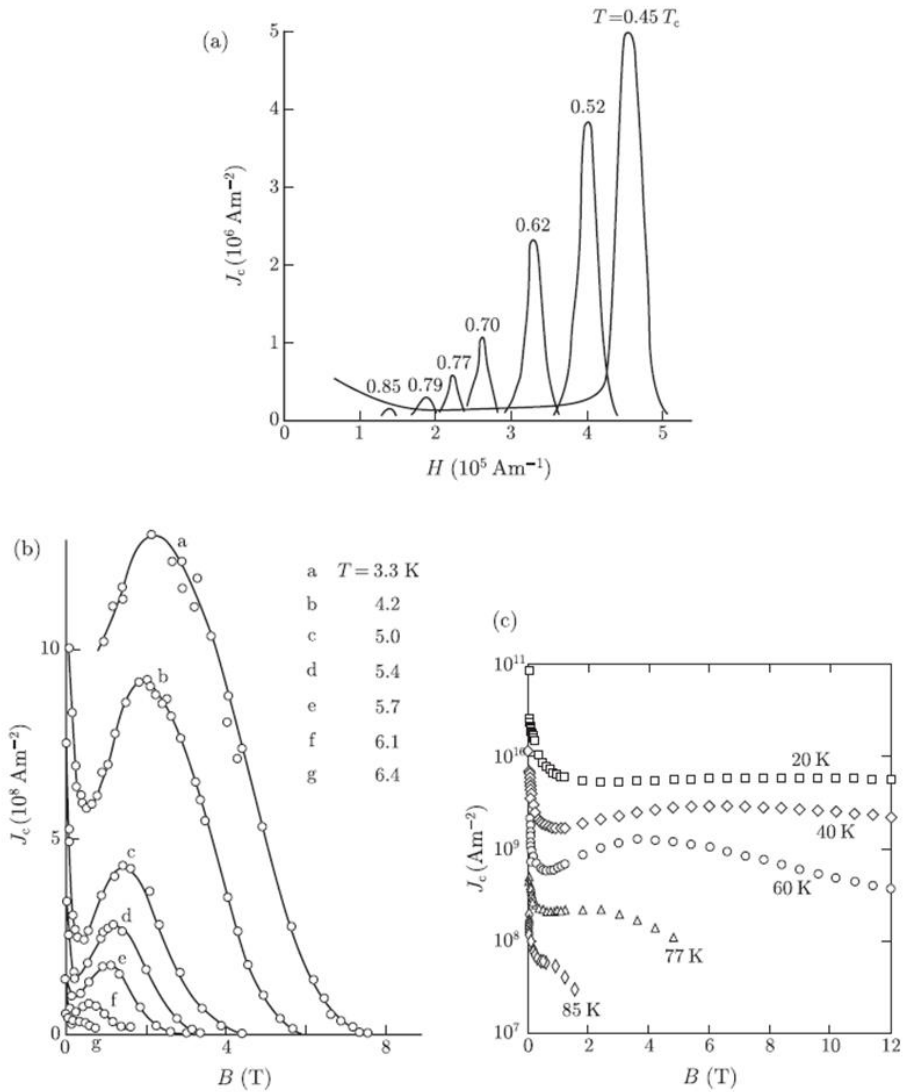


Fig. 1.2 各種超伝導体におけるピーク効果。
 (a) κ が低い Nb-50 at%Ta、(b) κ が高い Ti-22 at%Nb 及び
 (c)Y-Ba-Cu-o 高温超伝導体 $\mathbf{B} \parallel c$ 軸。

1.5 本研究の目的

先行研究では、1.2 節で説明した磁束ピンニング、1.4 節で説明したピーク効果など、様々な条件によって超伝導体の J_c が様々な変化することが知られている。そこで、その様々な条件の中でも、本研究では特にピンの形状に着目し、それが超伝導体の臨界電流密度に与える影響を解析することを目的とした。また、その解析手法として TDGL 方程式を用いた数値解析を提示する。

第2章 計算手法

2.1 計算条件

ここでは数値解析にあたってパラメータに与えた種々の条件を説明する。

2.1.1 超伝導体の数値解析モデル

まず、数値解析を行う空間においてはコヒーレンス長 ξ を単位とした。この空間に 1 辺の長さが 10 の立方体の超伝導体が存在し、その周りを満たす空間は全て真空であるとする。また、 x, y, z 軸を定義し、 z 軸方向に磁界を印加し、その上で y 軸方向に電流を流すように磁束密度 \mathbf{B} と電流密度 \mathbf{J} を、

$$\mathbf{J} = J_y \mathbf{i}_y \quad (2.1)$$

$$\mathbf{B} = B_z \mathbf{i}_z \quad (2.2)$$

この2式でそれぞれ定義することによって、横磁界の環境を再現した。Fig.2.1 に数値解析した超伝導体のモデルを示す。

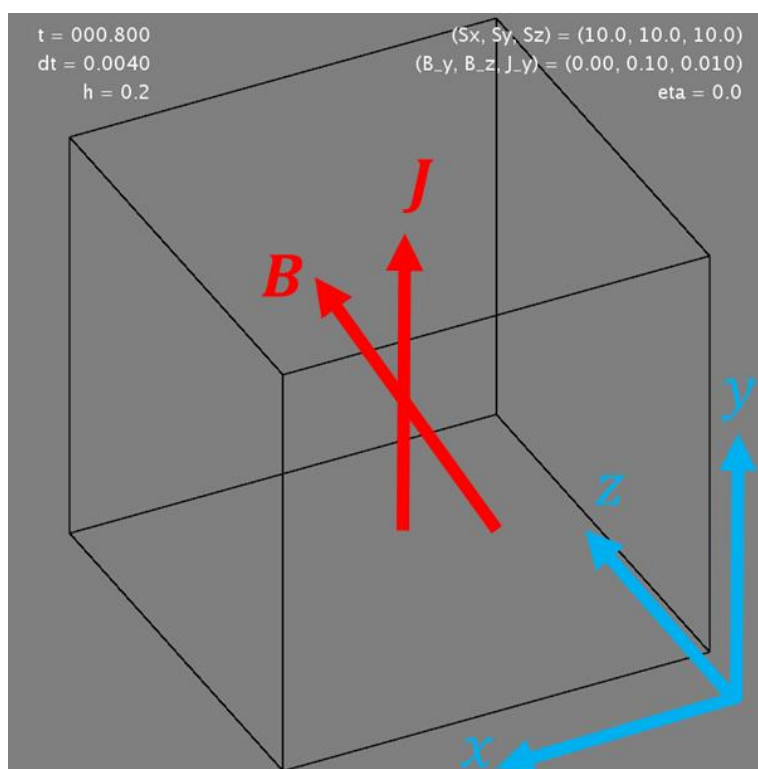


Fig. 2.1 超伝導体モデル

Fig. 2.1 に示すように、数値解析の実行画面上部には様々な情報を白字で表示させており、数値解析の監視に用いている。 t は数値解析内の経過時間、 dt は時間刻み幅、 h は空

間離散幅を示す。 (S_x, S_y, S_z) はそれぞれ、超伝導体の x 軸方向の長さ、 y 軸方向の長さ、 z 軸方向の長さであり、超伝導体のサイズを表している。 (B_y, B_z, J_y) はそれぞれ、超伝導体に印加している磁場の y 成分、 z 成分と流している電流密度の y 成分を表している。数値解析の条件では磁場は x 軸方向には印加せず、また、電流は x 軸および z 軸方向に流さないものとしているのでこれらは表示させていない。最後に η は超伝導電子のピンへの染み出しの強さを表し、近接効果を考慮しない場合、 η を0とし、考慮する場合 η を0以外にする。

本研究では、この超伝導体のモデルに対して、ピンを様々な形状、配置において導入し、外部磁束密度 B に対する臨界電流密度 J_c の特性(J_c - B 特性)を解析した。

2.1.2 オータパラメータ Ψ とスカラーポテンシャル V の初期条件

オータパラメータ Ψ とスカラーポテンシャル V の初期値は、それぞれ以下の2式で決定する。

$$\Psi(t=0) = \cos \theta + i \cdot \sin \theta \quad (2.3)$$

$$V(t=0) = -\frac{J_y \cdot y}{\sigma} \quad (2.4)$$

ここで、 θ は Ψ の位相である。この θ に $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲で乱数を与えることで Ψ の初期値を得る。

2.1.3 境界条件

超伝導体と真空の境界での電流とスカラーポテンシャルの振る舞いについて考慮し、境界における条件式を与える(境界条件)。まず、超伝導体外に超伝導電流は存在してはならないから、これを表す条件を与える。ここで、超伝導電流密度 J_s の x 成分について考慮し、 x 方向の単位面ベクトル \mathbf{n}_x との内積を0と置くことでこの条件を求める。(1.32)式より、

$$J_s = \frac{i}{2}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - |\Psi|^2 \mathbf{A} \quad (2.5)$$

$\Psi = \Psi_R + i\Psi_I$ 、 $\Psi^* = \Psi_R - i\Psi_I$ として、 x 成分において展開すると、

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{2}(\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - |\Psi|^2 \mathbf{A} \Big|_x \\
&= \frac{i}{2} \left\{ (\Psi_R - i\Psi_I) \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_R + i\Psi_I) - (\Psi_R + i\Psi_I) \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_R - i\Psi_I) \right\} \\
&\quad - (\Psi_R^2 + \Psi_I^2) \cdot A_x \\
&= \frac{i}{2} \left(\Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R + i\Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I - i\Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R + \Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I \right. \\
&\quad \left. - \Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R + i\Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I - i\Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R \right. \\
&\quad \left. - \Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I \right) - \Psi_R^2 A_x - \Psi_I^2 A_x \\
&= \Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R - \Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I - \Psi_R^2 A_x - \Psi_I^2 A_x \\
&= \Psi_I \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi_R - \Psi_I A_x \right) - \Psi_R \left(\frac{\partial}{\partial x} \Psi_I + \Psi_R A_x \right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

(2.6)式が0になるには、以下の条件を満たせば良い。

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi_R - \Psi_I A_x = 0 \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi_I + \Psi_R A_x = 0 \tag{2.8}$$

(2.7)式、(2.8)式をまとめると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi + iA_x \Psi = 0 \tag{2.9}$$

を得る。 y 成分、 z 成分についても同様に境界条件を求めることができ、まとめると、

$$\nabla \Psi + i\mathbf{A} \Psi = 0 \tag{2.10}$$

となる。

次に、スカラーポテンシャル V についての境界条件を定義する。電流 \mathbf{J} を y 軸方向に与えるという数値解析の条件に合致するように以下の式を与える。境界において、電流密度 \mathbf{J} は常伝導電流密度 \mathbf{J}_n と等しいから、 σ を常伝導状態における導電率であるとして以下のように境界条件を与えることが出来る。

$$\nabla V = -\frac{\mathbf{J}}{\sigma} \tag{2.11}$$

2.2 ピンを導入した数値解析モデル

ここでは、実際に数値解析に用いた超伝導体のモデルを説明する。

2.2.1 面状ピンモデル

まず、面状ピンモデルについて説明する。面状ピンとは薄い板のような形状を持ったピンを指す。本研究では面状ピンはある一定の厚さを持ち、無限の長さを持つと仮定した。このピンを導入した超伝導体数値解析モデルを、ピンの個数が1個の場合と2個の場合の、2つ用意した。ピンが1個の場合の面状ピンモデルを Fig. 2.2 に示し、また、Fig. 2.2 の種々のパラメータを Table. 2.1 に示す。また、ピンが2個の場合の面状ピンモデルを Fig. 2.3 に示し、また、Fig. 2.3 の種々のパラメータを Table. 2.2 に示す。なお、ピンのパラメータにおいて、ピン番号とはピンを複数個導入した時にそれぞれのピンを区別するために便宜的に付けている番号であり、数値解析結果には影響をもたらさない。

Table. 2.1 面状ピンのパラメータ(ピン個数が1個のモデル)

ピン番号	厚さ	中心座標(x)
1	1.0	(5.0)

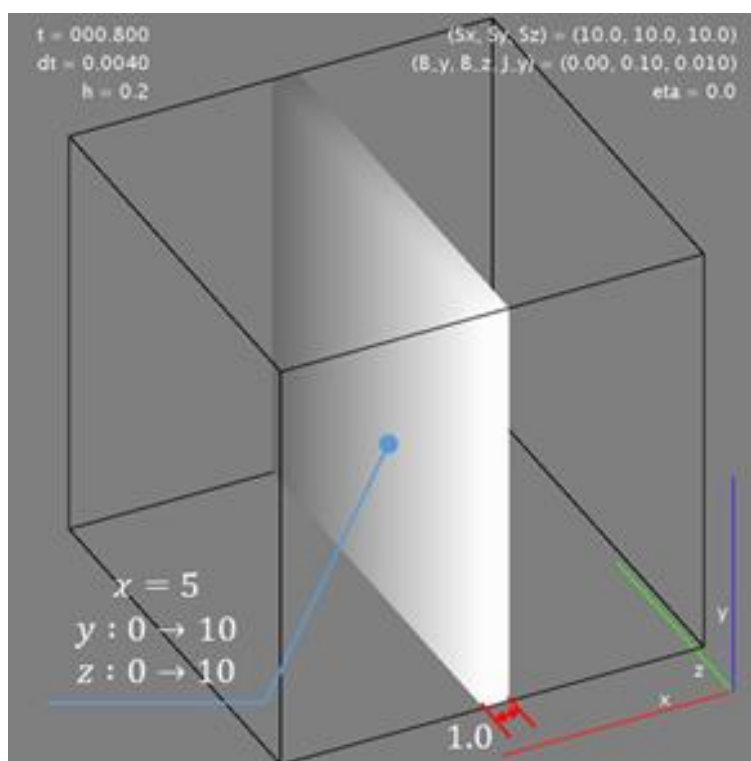


Fig. 2.2 面状ピンを1個導入した超伝導体の数値解析モデル

Table. 2.2 面状ピンのパラメータ(ピンの個数が2個のモデル)

ピン番号	厚さ	中心座標(x)
1	1.0	(3.0)
2	1.0	(7.0)

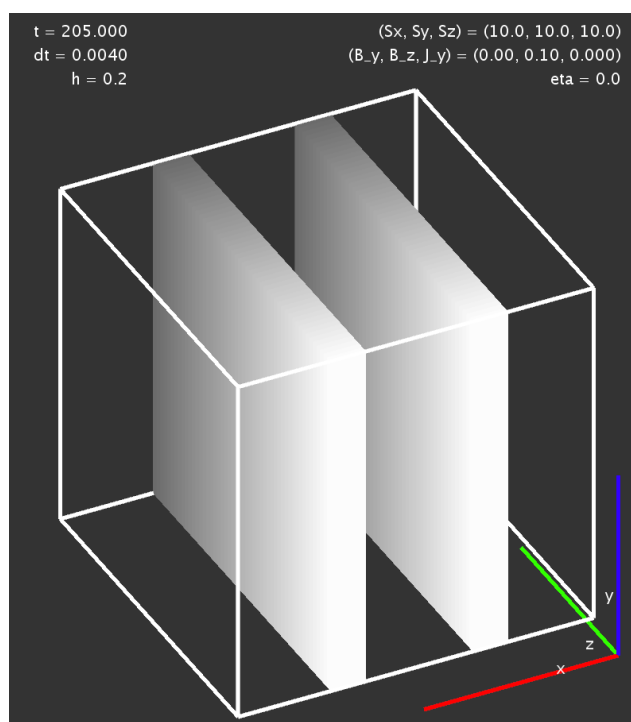


Fig. 2.3 面状ピンを2個導入した超伝導体の数値解析モデル

2.2.2 円柱状ピンモデル

次に、円柱状ピンモデルについて説明する。円柱状ピンとは円柱様の形状を持ったピンを指す。本研究では、円柱状ピンはある一定の直径を持ち、無限の長さを持つと仮定した。このピンを導入した超伝導体数値解析モデルを、ピンの個数が2個の場合と4個の場合の、2つ用意した。ピンが2つの場合の円柱状ピンモデルを Fig. 2.4 に示し、また、Fig. 2.4 の種々のパラメータを Table. 2.3 に示す。また、ピンが4つの場合の円柱状ピンモデルを Fig. 2.5 に示し、また、Fig. 2.5 の種々のパラメータを Table. 2.4 に示す。

Table. 2.3 円柱状ピンのパラメータ

ピン番号	直径	中心座標(x, y)
1	1.0	(5.0, 3.0)
2	1.0	(5.0, 7.0)

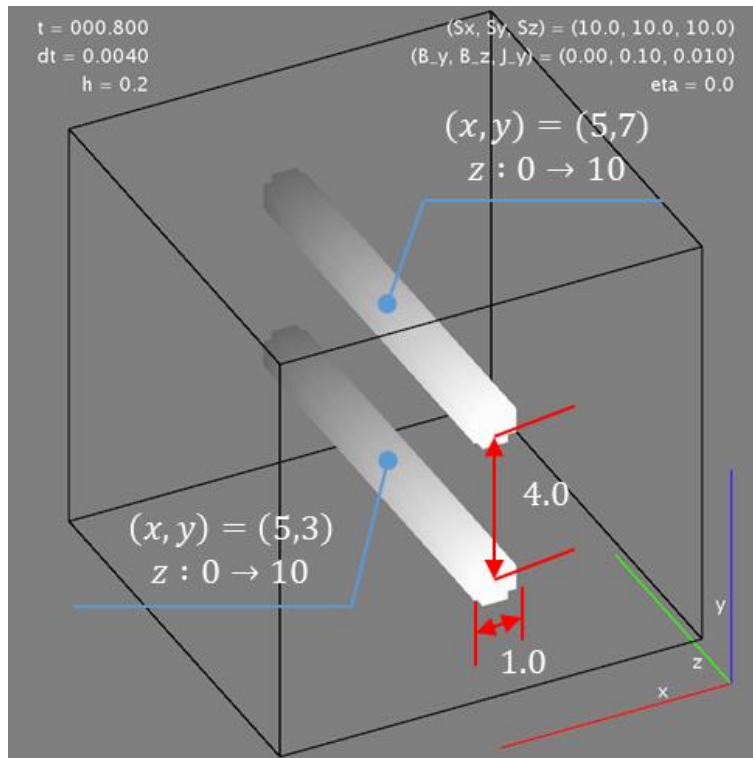


Fig. 2.4 円柱状ピンを2個導入した超伝導体の数値解析モデル

Table. 2.4 円柱状ピンのパラメータ(ピンの個数が4個のモデル)

ピン番号	直径	中心座標(x, y)
1	1.0	(3.0, 3.0)
2	1.0	(3.0, 7.0)
3	1.0	(7.0, 3.0)
4	1.0	(7.0, 7.0)

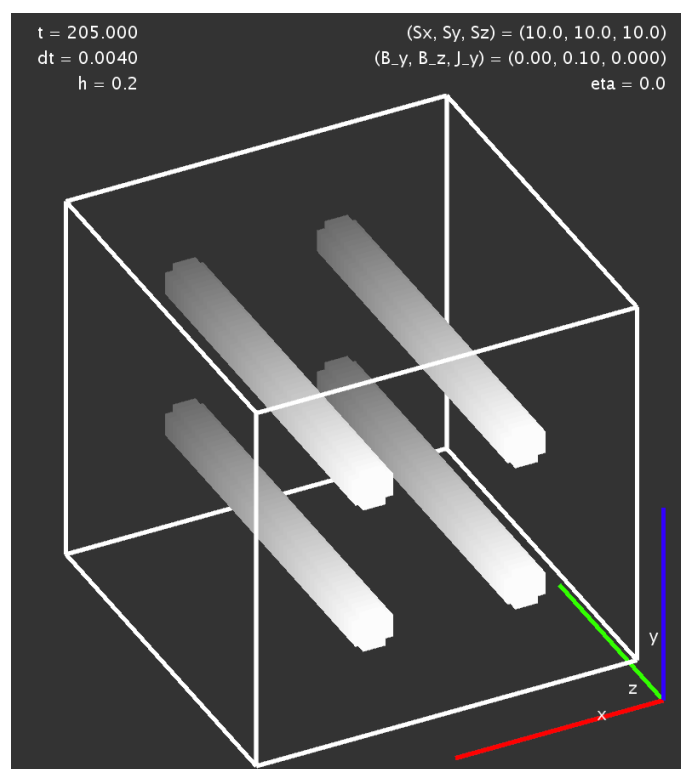


Fig. 2.5 円柱状ピンを4個導入した超伝導体の数値解析モデル

2.2.3 球状ピンモデル

次に、球状ピンモデルについて説明する。球状ピンとは球様の形状を持ったピンを指す。本研究では球状ピンはある一定の直径を持つ。このピンを導入した超伝導体数値解析モデルをピンの個数が4個の場合と8個の場合の、2つ用意した。ピンが4つの場合の球状ピンモデルを Fig. 2.6 に示し、また、Fig. 2.6 の種々のパラメータを Table. 2.5 に示す。また、ピンが8つの場合の球状ピンモデルを Fig. 2.7 に示し、また、Fig. 2.7 の種々のパラメータを Table. 2.6 に示す。

Table. 2.5 球状ピンのパラメータ(ピン個数が4個のモデル)

ピン番号	直径	中心座標(x, y, z)
1	1.0	(5.0, 3.0, 3.0)
2	1.0	(5.0, 3.0, 7.0)
3	1.0	(5.0, 7.0, 3.0)
4	1.0	(5.0, 7.0, 7.0)

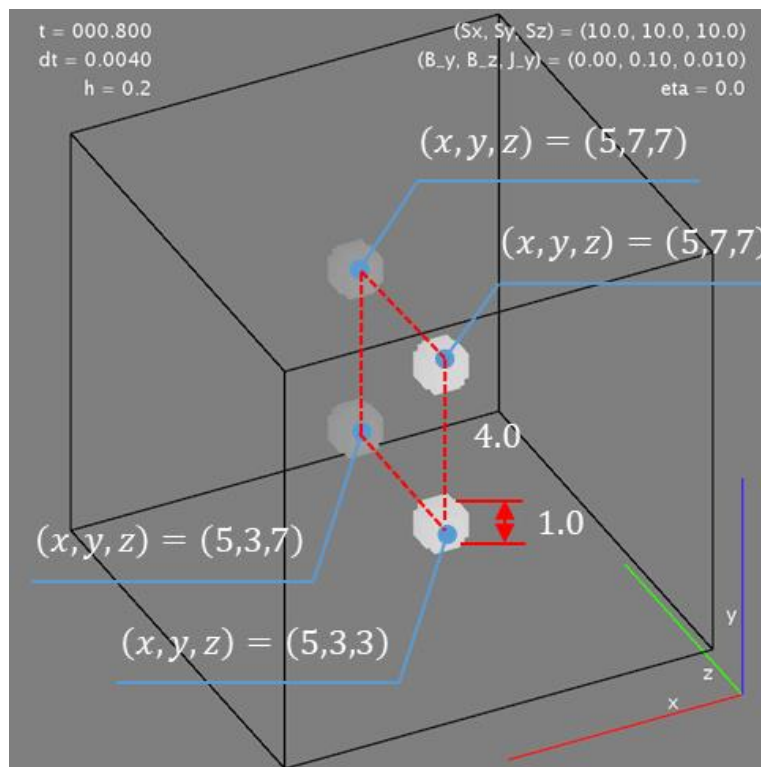


Fig. 2.6 球状ピンを4個導入した超伝導体の数値解析モデル

Table. 2.6 球状ピンのパラメータ(ピン個数が8個のモデル)

ピン番号	直径	中心座標(x, y, z)
1	1.0	(3.0, 3.0, 3.0)
2	1.0	(3.0, 3.0, 7.0)
3	1.0	(3.0, 7.0, 3.0)
4	1.0	(3.0, 7.0, 7.0)
5	1.0	(7.0, 3.0, 3.0)
6	1.0	(7.0, 3.0, 7.0)
7	1.0	(7.0, 7.0, 3.0)
8	1.0	(7.0, 7.0, 7.0)

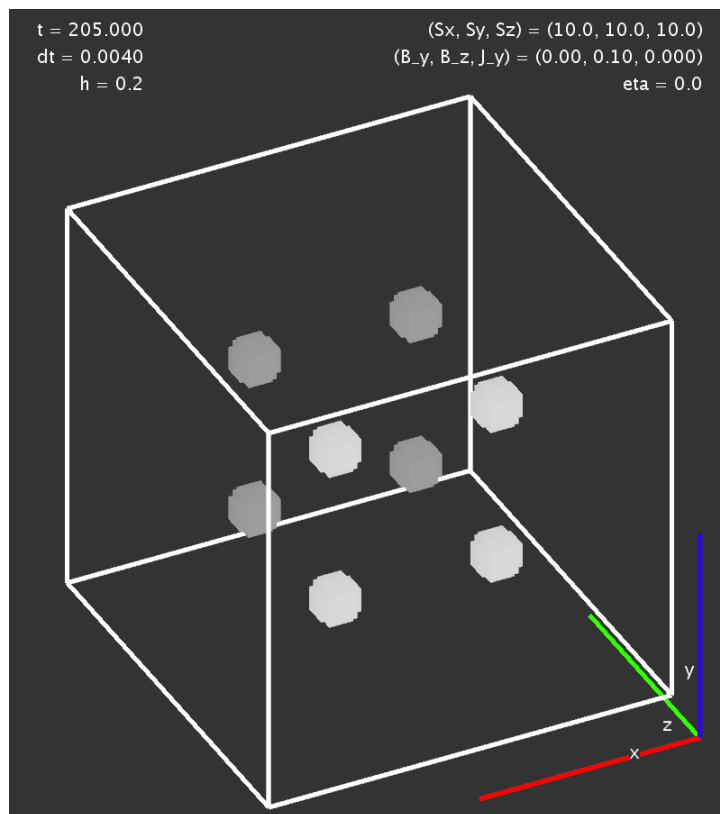


Fig. 2.7 球状ピンを8個導入した超伝導体の数値解析モデル

2.2.4 組み合わせピンモデル

最後に、組み合わせピンモデルについて説明する。これまでのモデルでは、同一の形状のピンのみが超伝導体内にある場合しか考えなかった。そこで、異なる形状のピンを同時に導入した場合にどのような特性を得るのかを調べるためにこれまでに説明した3つの形状のピンを組み合わせ超伝導体に導入したようなモデルを作成した。作成した組み合わせピンモデルを Fig. 2.8 に示す。また、Fig. 2.8 の種々のパラメータを Table. 2.7 に示す。

Table. 2.7 組み合わせピンモデルの各ピンのパラメータ

ピン番号	ピン形状	厚さおよび直径	中心座標
1	面	0.6	$(x) = (7.0)$
2	円柱	1.0	$(x, y) = (3.0, 3.0)$
3	球	1.0	$(x, y, z) = (3.0, 7.0, 3.0)$
4	球	1.0	$(x, y, z) = (3.0, 7.0, 7.0)$

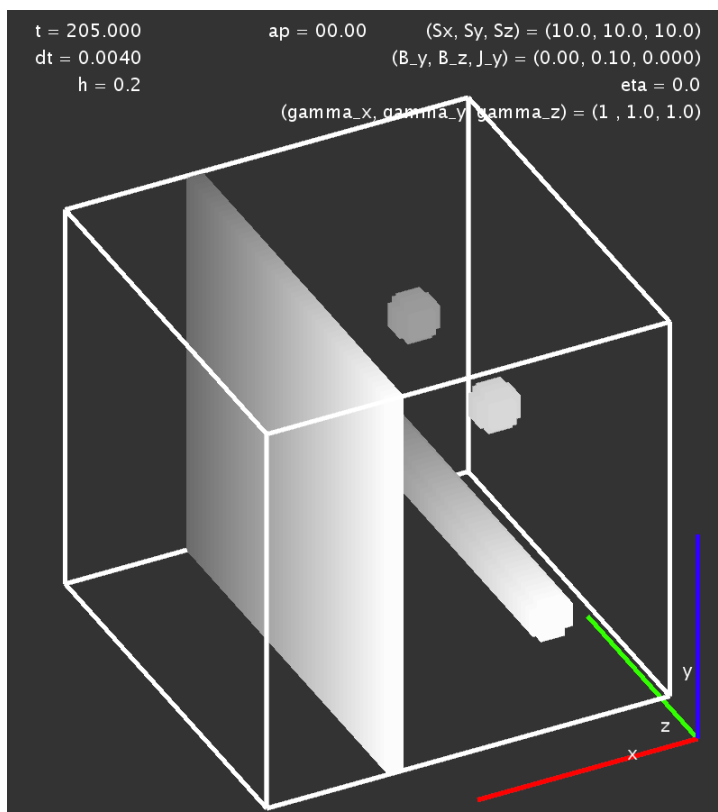


Fig. 2.8 異なる形状のピンを導入した超伝導体の数値解析モデル

第3章 計算結果および考察

3.1 E - J 特性

電界 E は電磁ポテンシャルによって以下のように表される。

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (3.1)$$

本研究では、細線近似を採用しているので、 $\partial \mathbf{A} / \partial t = 0$ となる(1.3.3 節参照)。よって、

$$\mathbf{E} = -\nabla V \quad (3.2)$$

となる。(3.2)式を用いて超伝導体モデルの電界 E を計算し、電界の外部電流に対する依存性(E - J 特性)を求めた。3.1 節にはそれぞれのピンの条件における E - J 特性を示す。

3.1.1 面状ピンモデルでの E - J 特性

2.2.1 節にて説明した面状ピンを 1 個および 2 個導入した超伝導体モデルの数値解析によって得られた E - J 特性をそれぞれ Fig. 3.1、Fig. 3.2 に示す。 E - J 特性のグラフは縦軸が電界 E 、横軸が電流密度 J を示す。 $J = 0.1, 0.2, 0.3, \dots$ について E を計算しプロットしており、この計算点間を直線で結ぶことで E - J 曲線を描画している。また、 B は外部磁界の磁束密度を示している。それぞれの B での E - J 曲線が色分けされてグラフ上に示されている。上記は E - J 特性を示すグラフの共通点であるので、以降では説明を省略する。Fig. 3.1 を見ると、どの B での E - J 特性も、一定の傾きの直線状に計算点が並び、ある J の値で E が急激に上昇している様子が見て取れる。この E の立ち上がりは超伝導体内の磁束線がピンを外れ、磁束フロー状態に移行したことによって、磁束線が超伝導体内に動くようになったことで大きな誘導起電力が発生し、それに起因する電気抵抗が生じたことを意味する。すなわち、 E が立ち上がる時の値の J を超伝導体に与えたとき、超伝導状態が破壊されるこの J の値が臨界電流密度 J_c と分かる。これによって J_c を求める。得られた J_c 、及びその考察は 3.2 節にて詳述する。

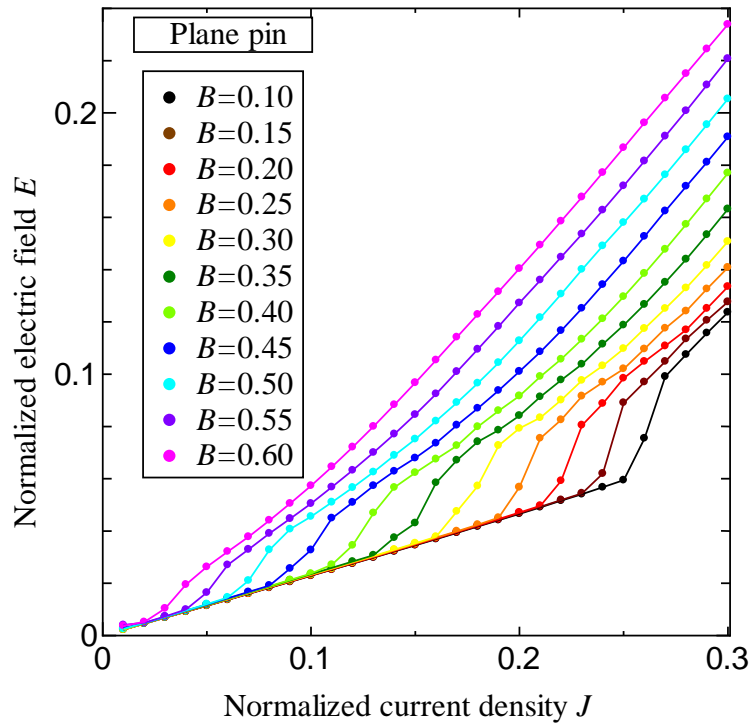


Fig. 3.1 面状ピンを1個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性

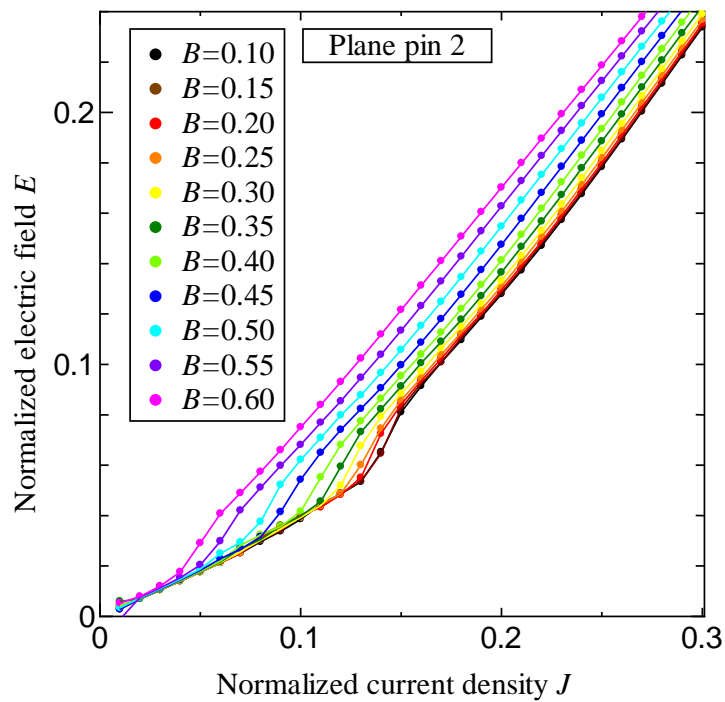


Fig. 3.2 面状ピンを2個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性

3.1.2 円柱状ピンモデルでの E - J 特性

2.2.2 節にて説明した円柱状ピンを 2 個および 4 個導入した超伝導体モデルの数値解析によって得られた E - J 特性をそれぞれ Fig. 3.3、Fig. 3.4 に示す。

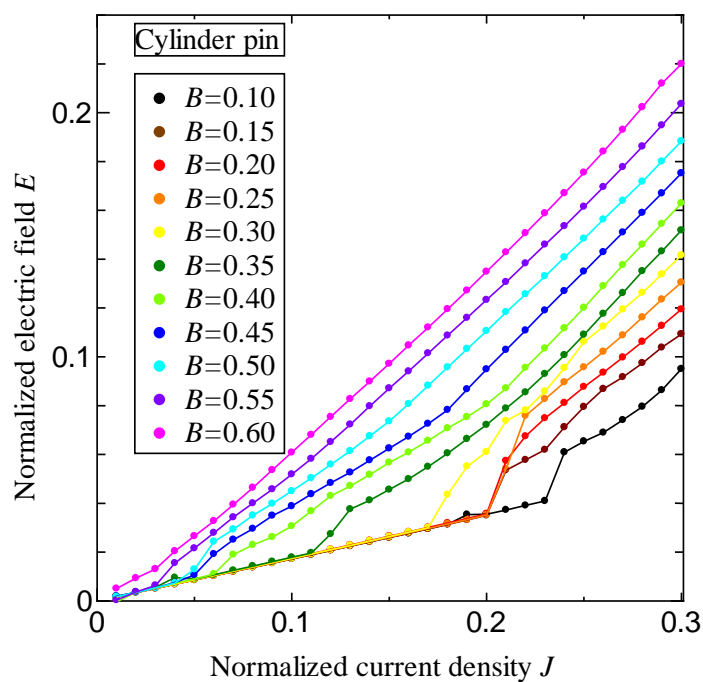


Fig. 3.3 円柱状ピンを 2 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性

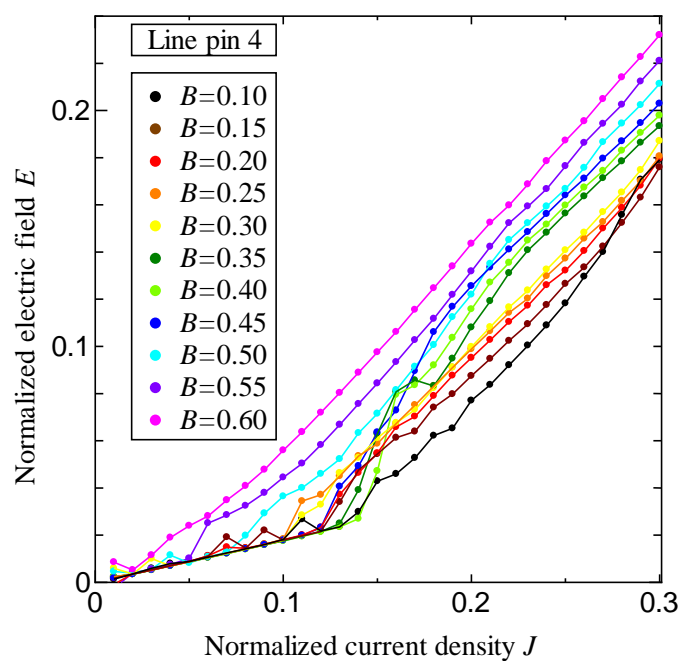


Fig. 3.4 円柱状ピンを 4 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性

3.1.3 球状ピンモデルでの E - J 特性

2.2.3 節にて説明した球状ピンを 4 個および 8 個導入した超伝導体モデルの数値解析によって得られた E - J 特性をそれぞれ Fig. 3.5、Fig. 3.6 に示す。

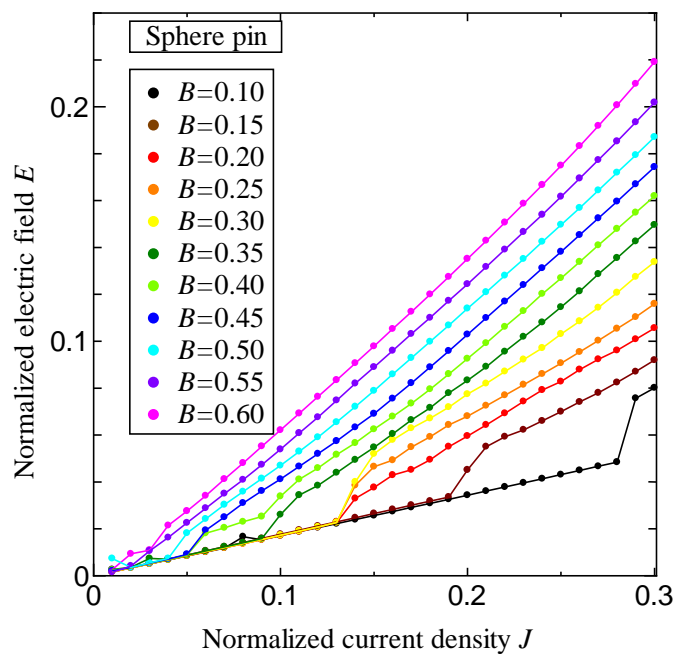


Fig. 3.5 球状ピンを 4 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性

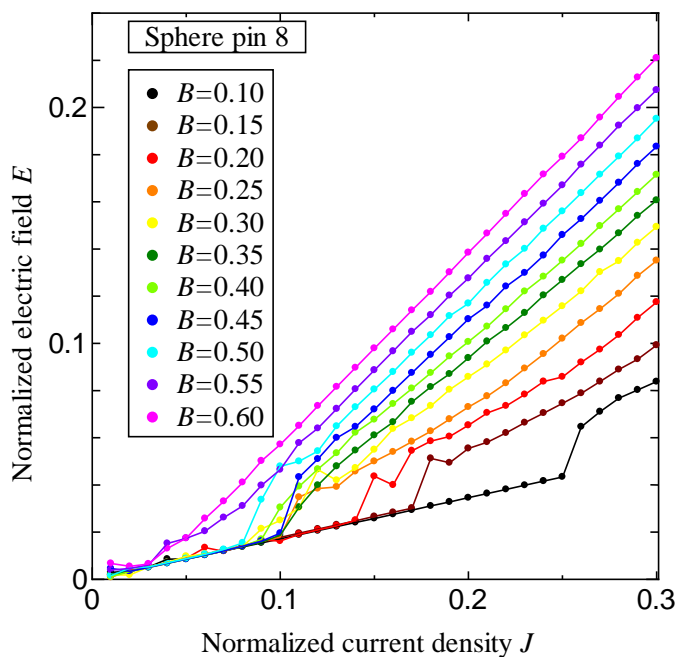


Fig. 3.6 球状ピンを 8 個導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性

3.1.4 組み合わせピンモデルでの E - J 特性

2.2.4 節にて説明した異なる形状のピンを組み合わせ導入した超伝導体モデルの数値解析によって得られた E - J 特性を Fig. 3.7 に示す。尚、途中でグラフが途切れているように見えるのは数値解析の効率を高めるために J_c が検知された時点で解析を打ち切っている為である。

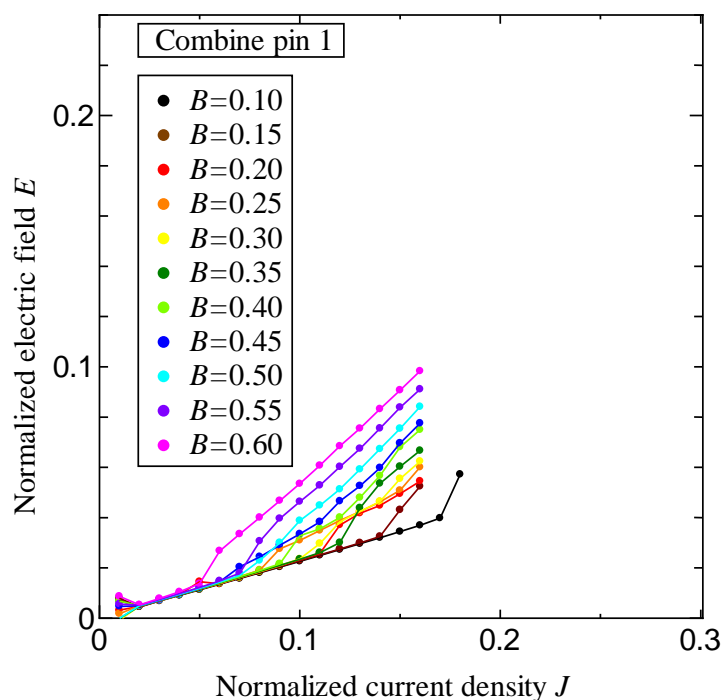


Fig. 3.7 異なる形状のピンを導入した超伝導体モデルにおける E - J 特性

3.2 J_c - B 特性

3.2.1 面状ピンモデルでの J_c - B 特性

2.2.1 節で説明した面状ピンモデルの数値解析によって得られた J_c - B 特性を Fig. 3.4 に示す。図中の曲線はそれぞれ点線が Fig. 2.2 の面状ピン 1 個を導入した超伝導体モデルでの J_c - B 特性、実線が Fig. 2.3 の面状ピン 2 個を導入した超伝導体モデルでの J_c - B 特性を示す。

まず、点線で示される面状ピン 1 個のモデルでの J_c - B 特性を見ると、その J_c は B が増加するに従って非常に直線的に減少する様子が分かる。これは後述する他の形状のピンでは見られないことから、面状ピンを導入した超伝導体モデルの J_c - B 特性に特有なものである。今回比較した他の 2 つのピンの形状との比較から、この特徴の形成には磁束の流れる方向に対して垂直に広い面積を持つこと、あるいはピンの体積が大きいことが寄与していることが考えられる。

続いて、実線で示される面状ピン 2 個の場合では、ピンが 1 個の場合と比べて $B = 0.1 - 0.3$ の高磁界側の J_c が小さくなっている。このような、同じ形状のピンの個数を増やした時に高磁界側の J_c が小さくなる傾向は他の 2 つのピンモデルでも確認されたことから、ピンの体積が増えることによって高磁界側の J_c は敏感に反応し、小さくことが考察される。一方で低磁界側ではピンの体積があまり寄与しないことが分かる。

最後に、工学的な応用の観点で見ると、このピンを導入した超伝導体は、 J_c の B 依存性が非常に単調であることから作成した超伝導体の J_c - B 特性を少ない計測点から予測することが出来、特性評価が比較的簡単になることが予想される。

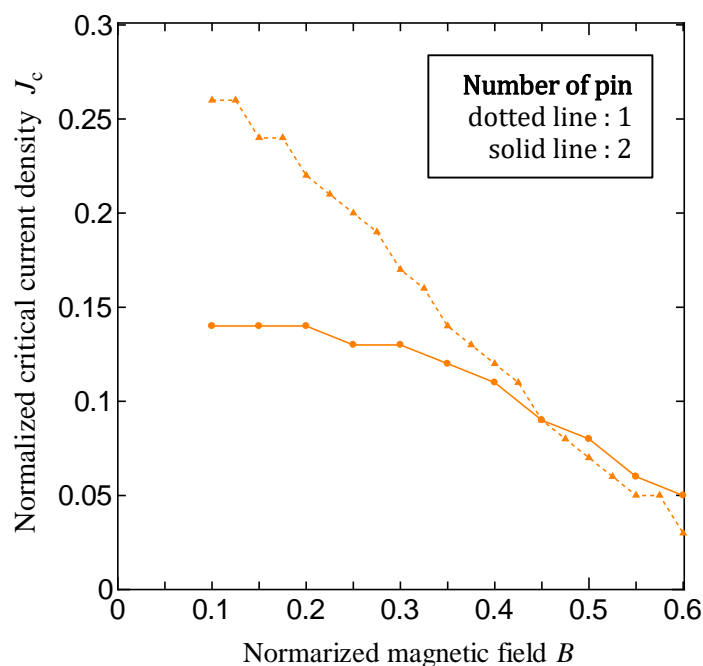


Fig. 3.8 面状ピンを導入した超伝導体モデルにおける J_c - B 特性

3.2.2 円柱状ピンモデルでの J_c - B 特性

2.2.2 節で説明した円柱状ピンモデルの数値解析によって得られた J_c - B 特性を Fig. 3.5 に示す。図中の曲線はそれぞれ点線が Fig. 2.4 の円柱状ピン 2 個を導入した超伝導体モデルでの J_c - B 特性、実線が Fig. 2.5 の円柱状ピン 4 個を導入した超伝導体モデルでの J_c - B 特性を示す。

円柱状ピン導入した超伝導体でも J_c が B の増加に伴って一様に減少するのは、面状ピンの場合と共通している。点線で示される円柱状ピン 2 個のモデルの J_c - B 特性を見ると、 $B = 0.125 - 0.275$ の範囲で J_c がほぼ減少しなくなり、再び一様に減少するようになるという特徴を有している。これは後述の球状ピンにも似たような特徴が見受けられる。このような特徴を有する理由は 1.4 節で説明したマッチング機構によるピーク効果にあると考えられる。なぜなら、この円柱状ピンモデル、あるいは球状ピンモデルは面状ピンと違い、複数のピンが導入されている為である。すなわち、円柱状ピン 2 個での結果は、

前述した B の範囲においてピン間隔と磁束線格子間隔が近くなり、ピーク効果によって J_c の減少が緩和された結果であると予想される。このモデルにおいてはピンとピンとの間隔は4.0である。また、界面とピンとの間隔は5.0である。界面もピンとして働く可能性があるため、それを考慮に入れた。ここで、ピンの間隔と磁束線格子間隔が一致する磁束密度 B を考える。磁束線格子間隔 a_f を、以下の関係から求める。

$$a_f = \left(\frac{2\phi_0}{\sqrt{3}B} \right)^{\frac{1}{2}} \propto \frac{1}{\sqrt{B}} \quad (3.3)$$

いくつかの B における a_f を数値解析画面から測定し、それらの値と(3.3)式によって比例式を立て、 B の全ての範囲における a_f を求めた。ここから $a_f = 4.0$ となるのは $B \cong 0.39$ のときであり、 $a_f = 5.0$ となるのは $B \cong 0.25$ のときである。これらの求めた B について注目して J_c - B 特性を見る。 $B \cong 0.39$ 近傍では特に変わった様子は見られないが $B \cong 0.25$ 近傍では J_c の減少の緩和が見られる。この結果から、このモデルではえんちゅ上ピンよりも界面の方が影響が強く、界面とピンとの間隔に磁束線格子間隔が近づくことによってより高いピンニング効果が発揮されたと考えられる。

次に実線で示される円柱状ピン4個のモデルでの J_c - B 特性を見ると、前節で述べたように円柱状ピン2個の場合と比べて高磁界側の J_c が小さくなっている。また、このモデルの大きな特徴として $B = 0.4$ に大きなピークが観測されている。このモデルでは、ピン同士の間隔に磁束線格子間隔が近づいたことによってマッチング機構によるピーク効果が表れたと考えられる。また、ピンが2個の場合と4個の場合の比較から、ピンの個数、あるいは配置によって界面ピンの影響が強く、あるいは弱くなることが分かる。

最後に、工学的な応用の観点で考えると、円柱状ピンを導入した超伝導体は、ある B の範囲内であれば J_c が減少せずほぼ一定であるから、様々な強さの外部磁界において汎用的に用いることが出来るという利点があることが予想される。

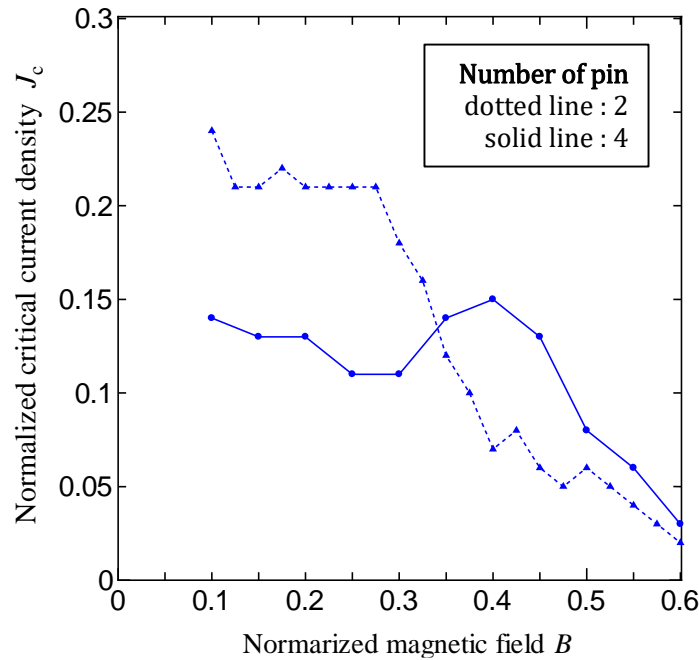


Fig. 3.9 円柱状ピンを導入した超伝導体モデルにおける J_c - B 特性

3.2.3 球状ピンモデルでの J_c - B 特性

2.2.3 節で説明した球状ピンモデルの数値解析によって得られた J_c - B 特性を Fig. 3.6 に示す。図中の曲線はそれぞれ点線が Fig. 2.6 の球状ピン 4 個を導入した超伝導体モデルでの J_c - B 特性、実線が Fig. 2.7 の球状ピン 8 個を導入した超伝導体モデルでの J_c - B 特性を示す。

球状ピンを導入した超伝導体は、円柱状ピンモデルの場合と類似した J_c - B 特性を有している。まず Fig. 3.6 上に点線で示される球状ピンを 4 個導入したモデルの J_c - B 特性を見ると、円柱状ピンを 2 個導入したモデルの J_c - B 特性と類似しており、 $B = 0.200 - 0.325$ の範囲で J_c の減少が緩和されている。

次に Fig. 3.6 上に実線で示される球状ピンを 8 個導入したモデルの J_c - B 特性を見ると、円柱状ピンを 4 個導入したモデルの J_c - B 特性と類似しており、 $B = 4.0$ を中心としてピーク効果のように曲線が凸型になっている。

球状ピンモデルのみの特徴として、ピンの数を 4 個から 8 個に増やした場合でも他の 2 つのピンのように J_c が小さくなっていない。これは、球状ピンが他の 2 つのピンに比べて体積が非常に小さく、体積の影響を受けづらい為であると考えられる。

この球状ピンを導入した超伝導体を工学的に応用する場合を考えると、円柱状ピンの場合と同様の利点が予想される。また、 $B = 0.1 - 0.2$ 程度の低磁界の場合では非常に高い J_c が得られているから、外部磁界を低く保てる環境下では非常によい J_c を保ちながら運用できることが予想される。

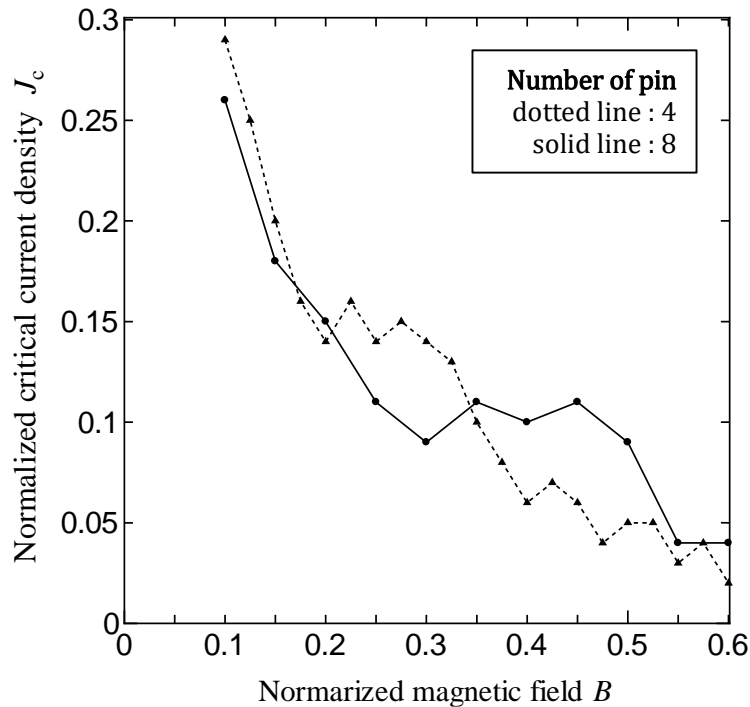


Fig. 3.10 球状ピンを導入した超伝導体モデルにおける J_c - B 特性

3.2.4 組み合わせピンでの J_c - B 特性

2.2.3 節で説明した組み合わせピンモデルの数値解析によって得られた J_c - B 特性を Fig. 3.10 に示す。

Fig. 3.10 を見ると、このモデルでの J_c - B 特性は、低磁界側で高い J_c を持つという球状ピンモデルのような特徴、 $B = 3.5$ でピークを持つという円柱状ピンモデルのような特徴、高磁界側で J_c が比較的高く保たれるという面状ピンのような特徴を持つことが分かる。この結果から、異なる形状のピンを同時に導入した時、それぞれの形状のピンが持つ特徴も同時に発現する可能性が示唆された。これによって異なる形状のピンを導入していくことによって作成する超伝導体の J_c - B 特性をより容易に制御できることが予想される。しかし、本研究では、異なる形状のピンを組み合わせたようなモデルはこの一例のみしか用意しなかったため、他の場合において、導入したピンの形状による特徴が特性に現れる確証は得られていない。より多くのモデルケースを解析し、これを確かめることが今後の課題と言える。

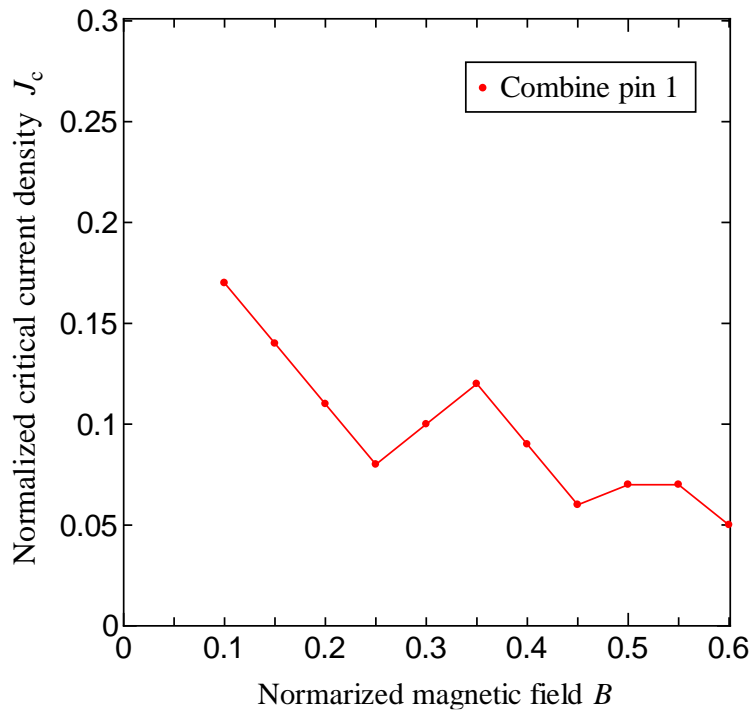


Fig. 3.11 組み合わせピンモデルにおける J_c - B 特性

3.2.5 J_c - B 特性の比較

これまで示した J_c - B 特性を改めて1つのグラフにまとめて Fig. 3.10 に示す。この節では特に、超伝導体に最も大きい J_c を与えるのはどのピンであるのか、という点に着目して各々のピンモデルの J_c - B 特性を見る。Fig. 3.10 に示す6つのピンモデルでの J_c - B 特性を比較すると、最も良い J_c を持つピンモデルが B によって異なることが分かる。具体的にはそれぞれ $B = 0.100$ のとき、球状ピン4個のモデル、 $B = 0.125 - 0.200$ のとき、面状ピン1個のモデル、 $B = 0.225 - 0.325$ のとき、円柱状ピン2個のモデル、 $B = 0.35 - 0.45$ のとき、円柱状ピン4個のモデル、 $B = 0.50$ のとき、球状ピン8個のモデル、 $B = 0.55 - 0.60$ のとき、組み合わせピンモデルが最も良い J_c が得られている。

これらの結果と、3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 節で述べたようにそれぞれのピンは、工学的な応用において互いに異なった利点を有していることから、作成する超伝導体を運用する環境や、運用目的によって前述の各ピンの利点を照らして最適なピン形状を選択することが重要であると私は考える。

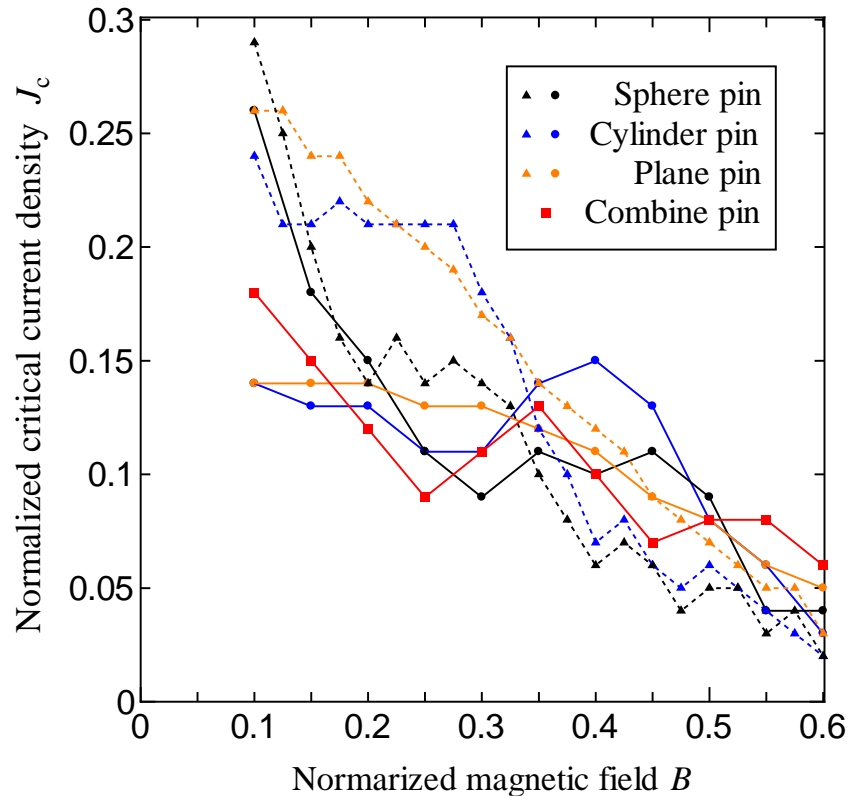


Fig. 3.12 異なる形状のピンを導入した超伝導体モデルにおける J_c - B 特性
 橙・実線：面状ピン 1 個を導入したモデル(Fig. 2.2)の J_c - B 特性
 橙・点線：面状ピン 2 個を導入したモデル(Fig. 2.3)の J_c - B 特性
 青・実線：円柱状ピン 2 個を導入したモデル(Fig. 2.4)の J_c - B 特性
 青・点線：円柱状ピン 4 個を導入したモデル(Fig. 2.5)の J_c - B 特性
 黒・実線：球状ピン 4 個を導入したモデル(Fig. 2.6)の J_c - B 特性
 黒・点線：球状ピン 8 個を導入したモデル(Fig. 2.7)の J_c - B 特性
 赤・実線：組み合わせピンモデル(Fig. 2.8)の J_c - B 特性

第4章 まとめ

本研究では、TDGL 方程式を解くことによって超伝導体の数値解析を行った。数値解析では、第2種超伝導体を想定したピンを導入した超伝導体モデル6つを作成し、そのモデルの臨界電流密度 J_c を計算した。その結果、様々なピンを導入した超伝導体モデルにおいて、その E - J 特性および J_c - B 特性を得ることが出来た。これは今後の超伝導体の解析における新しい手法としての本研究の数値解析の有用性を提示している。また、得られた複数の J_c - B 特性とそのピンとの対応から、それらのピンの J_c - B 特性が形成される理由を考察した。その結果、面状ピンは他2つのピンと比較して大きい体積、あるいは磁束が動く方向に垂直広い面積持つことによって $B = 0.50$ 以上といった高磁界側での J_c が比較的高く保たれること、円柱状ピンは界面あるいはピンとの間のマッチング機構によるピーク効果が3つのピン形状の中で最も発揮されやすく、ある一定の B で大きな J_c を超伝導体に与えること、球状ピンはその体積の小ささによって $B = 0.1$ 程度の低磁界で非常に大きな J_c を示すということが分かり、また、各々の形状のピンに異なる応用上の利点があることが分かった。それらの結果から、それぞれ異なる形状のピンを同時に導入したような場合にどのような J_c - B 特性が得られるのかという興味を持ち、面状ピン、円柱状ピン、球状ピンを同時に導入した超伝導体モデルを作成し、これを解析した。結果、組み合わせピンモデルの J_c - B 特性には、それぞれの形状のピンを導入した場合の J_c - B 特性を持つ特徴が同時に現れることが分かった。最後に、超伝導体に最も大きい J_c を与えるのはどのピンであるか、という視点で各々のピンモデルの J_c - B 特性の比較を行った。その結果、 B によって最も大きい J_c を与えるピンモデルが異なることが分かった。考察によって得られた各々の形状のピンに異なる応用上の利点がある、 B によって最も大きい J_c を与えるピンモデルが異なるという2つの結果から、本研究結果とも照らして、作成超伝導体の作成目的から最適なピン条件を選択することが重要であることを示唆した。そして、その最適なピン条件を探索には本研究の数値解析が活用できることが大いに見込まれる。

参考文献

- [1] V. L. Ginzburg, L. D. Landau, Zh. Eksp: Teor. Fiz. 20 (1950) 1064
- [2] T. Matsushita: Flux Pinning in Superconductor, second ed., Springer, 2014
- [3] 松下照男:超伝導応用の基礎 産業図書株式会社 東京 2004
- [4] D. Y. Vodolazov, Phys. Rev. B 88 (2013) 014525
- [5] J. F. Blackburn et. al: Philosophical Magazine 80 (2000) 1455
- [6] E. S. Otabe and T. Matsushita: Cryogenics (1993) 33 531-540
- [7] T. Matsushita, E. S. Otabe, and T. Matsuno, Adv. Cry. Eng. Mater. 36, 263 (1990).
- [8] T. Matsushita, J. Appl. Phys. 54, 281 (1983).
- [9] T. Matsushita, J. Phys. Soc. Jpn. 51, 2755 (1982).
- [10] D. A. Jacobson, Phys. Rev. 138, 1066 (1965). “Ginzburg-Landau Equations and the Josephson Effect”
- [11] K. E. Osborne: Phil. Mag. 23 (1971) 1113.
- [12] Yu. F. Bychkov, V. G. Vereshchagin, V. R. Karasik, G. B. Kurganov: Sov. Phys. JETP 29 (1969) p.276.
- [13] H. Küpfer, I. Apfelstedt, R. Flükiger, C. Keller, R. Meier-Hirmer, B. Runtsch, A. Turowski, U. Wiech and T. Wolf: Cryogenics 29 (1989) 268.
- [14] 高橋亮一, 棚町芳弘: 計算力学と CAO シリーズ差分法 培風館 東京 1991
- [15] 田中敏幸: 数値計算法基礎 コロナ社 東京 2006
- [16] 戸川隼人: 数値解析とシミュレーション 共立出版 東京 1987
- [17] 新濃清志, 船田哲男: 数値解析の基礎-理論と PAD・PASCAL・C 培風館 東京 1991
- [18] A. Schmid: Phys. Condens. Mat. 5 (1966) 302
- [19] M. Tinkham: Introduction to Superconductivity, second ed., McGraw-Hill,1996
- [20] e.g. R. S. Thompson and C.-R. Hu: Phys. Rev. Lett. 27 (1971) 1352
- [21] N. Kopnin: Theory of Nonequilibrium Superconductivity, Clarendon Press, Oxford, 2001
- [22] R. Kato, Y. Enomoto, S. Maekawa: Phys. Rev. B 44 (1991) 6916
- [23] 谷村賢太: 時間依存 Ginzburg-Landau 方程式を用いた異なるピンにおける超伝導体内の磁束線運動に関する研究, 九州工業大学情報工学府修士学位論文(2018), A-1.
- [24] 増田嘉道, 時間依存 Ginzburg-Landau 方程式を用いた縦磁界下の超伝導体内の磁束線に関する研究, 九州工業大学情報工学府修士学位論文(2016), A-1.
- [25] W. E. Lawrence, S. Doniach, Proceedings of the Twelfth Conference on Low Temperature Physics (1971), 361-362.
- [26] I. A. Sadovskyy et. al: Journal of Computational Physics 294 (2015) 639.

謝辞

本研究にあたっては、様々な方から多大なご助力を頂きました。

まず、指導教官であった小田部荘司教授には、日々の研究への助言は勿論の事、学生としての心掛けを説いて下さったこと、海外の大学生との交流の場を設けて下さったこと等、研究に係る非常に多岐なご支援を頂きました。心から感謝申し上げます。

同じく、九州工業大学情報工学部で超伝導体の研究を為されている松下照男教授には超伝導現象を説明する理論を導入から丁寧にご教授頂きました。感謝申し上げます。

次に、特に応用物理学会九州支部での発表において、産総研の馬渡康德先生には、予稿の推敲を行って頂いただけでなく、発表当日には内容への質問を頂きました。このことは自身の研究内容を精査する機会となり、研究をより発展させる一助となりました。感謝申し上げます。

有明高専の松野哲也先生にも馬渡先生と同様に、予稿の推敲と、質問を頂きました。また、松野先生はこの学会での小田部研究室の発表を受けて TDGL 数値解析の新たな実装を実現され、その情報を提供して頂きました。これは大いに刺激になり、特に数値解析を動かすプログラムについて再考する機会となり、研究への理解と発展に役立ちました。感謝申し上げます。

馬渡先生、松野先生の両名におかれては、上記の応用物理学会でのご支援だけでなく共同研究者としてお力添えを賜り、本研究の多くの場面で毎々、お世話になりました。重ねてお礼申し上げます。

学会に同席された九州大学の寺西亮准教授からは、発表の後、研究の今後の展望に関する示唆を頂き、学会発表後の研究の推進させることが出来ました。感謝申し上げます。

最後に、同研究室の米塚里奈さん、濱田雄成さんにおいては、同一グループで協力して研究を行い、データの整理や、関連文献の査読、数値解析プログラムの改善において大変に協力をして頂きました。厚く御礼申し上げ、感謝いたします。