

令和 3 年度  
修士学位論文

様々な磁界方向における異方性を考慮した超  
伝導体の 3 次元量子化磁束構造の研究

小田部研究室  
(学籍番号：20676103)  
閻 洪

九州工業大学 情報工学府  
先端情報工学専攻 電子情報工学分野  
指導教員：小田部 荘司 教授  
令和 4 年 2 月 9 日

# 目次

第1章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	超伝導現象	2
1.2.1	完全導電性	2
1.2.2	マイスナー効果(完全反磁性)	2
1.3	酸化物超伝導体	4
1.3.1	銅酸化物超伝導体の構造と性質	4
1.4	磁束線の構造	5
1.5	磁束ピンニング	6
1.5.1	ピン力	7
1.5.2	臨界電流密度	8
1.6	(Time-Dependent) Ginzburg-Landau 方程式	9
1.6.1	Ginzburg-Landau (G-L) 方程式	9
1.6.2	Time-Dependent Ginzburg-Landau (TDGL) 方程式	10
1.6.3	TDGL 方程式の簡易化	11
1.7	近接効果	16
1.8	ピーク効果	16
1.9	超伝導体の異方性	17
1.9.1	有効質量・有効導電率モデル	17
1.10	目的	20
第2章	計算手法	21
2.1	主要アルゴリズム	21
2.1.1	ガウス=ザイデル法	21
2.1.2	オイラー法	21
2.1.3	二分探索法	22

2.2	計算条件-----	23
2.2.1	電流密度 $J$ と外部磁束密度 $B$ の条件-----	23
2.2.2	オーダーパラメータ $\Psi$ とスカラーポテンシャル $V$ の初期条件-----	24
2.2.3	境界条件-----	24
2.3	シミュレーションモデル $A(x, y, z) = (10, 10, 10)$ -----	25
2.3.1	球状ピン 8 個-----	26
2.3.2	$z$ 軸柱状ピン 4 本-----	27
2.3.3	$y$ 軸柱状ピン 4 本-----	28
2.3.4	面状ピン 1 枚-----	29
2.4	シミュレーションモデル $B(x, y, z) = (40, 10, 40)$ -----	30
2.4.1	球状ピン 162 個-----	31
2.4.2	$z$ 軸柱状ピン 10 本-----	32
2.4.3	$y$ 軸柱状ピン 81 本-----	33
2.4.4	面状ピン 3 枚-----	34
第3章	実験結果と考察-----	35
3.1	シミュレーションモデル $A(x, y, z) = (10, 10, 10)$ -----	35
3.1.1	ピンなしの超伝導体の $J_c$ - $B$ 特性-----	35
3.1.2	球状ピンの $J_c$ - $B$ 特性-----	36
3.1.3	$z$ 軸柱状ピンの $J_c$ - $B$ 特性-----	37
3.1.4	$y$ 軸柱状ピンの $J_c$ - $B$ 特性-----	38
3.1.5	面状ピンの $J_c$ - $B$ 特性-----	39
3.1.6	$B = 0.2$ における $J_c$ - $B$ 特性-----	40
3.2	シミュレーションモデル $B(x, y, z) = (40, 10, 40)$ -----	41
3.2.1	シミュレーションモデル A と B における $J_c$ - $B$ 特性-----	41
3.2.2	異方性パラメータ $\gamma_z = 1$ の場合における $J_c$ - $B$ 特性-----	42
3.2.3	異方性パラメータ $\gamma_z = 512$ の場合における $J_c$ - $B$ 特性-----	43
3.2.4	異方性パラメータ $\gamma_z = 512$ の場合 $z$ 軸柱状ピンの $J_c$ - $B$ 特性-----	44

3.2.5	異方性パラメータ $\gamma_z = 512$ の場合面状ピンの $J_c$ - $B$ 特性-----	45
第4章	まとめ-----	46
参考文献	-----	47
謝辞	-----	48
研究業績	-----	49

# 図目次

図 1.1 マイスナー効果 (a) $T_c$ 以上で磁界を加えたのち、 $T_c$ 以下に冷やした場合(b) $T_c$ 以下に冷やしてから磁界を加えた場合 .....	2
図 1.2 第一種超伝導体の磁場-温度平面上の相図.....	3
図 1.3 第二種超伝導体の磁場-温度平面上の相図.....	3
図 1.4 不可逆線の磁場-温度平面上の相図.....	4
図 1.5 代表的な高温酸化物超伝導体の結晶構造[9] .....	5
図 1.6 磁束線の構造 .....	6
図 1.7 面状ピンを有する超伝導体内の様子 .....	7
図 1.8 積層欠陥と磁束線のピン止め効果 ( $H \parallel c$ ) .....	8
図 1.9 積層欠陥と磁束線のピン止め効果 ( $H \parallel ab$ ) .....	9
図 1.10 超伝導体と常伝導体 (ピン) が接触している状態[18] .....	16
図 1.11 Bi 濃度を周期的に変えてピンを導入した Pb-Bi 薄膜の $J_c$ - $B$ 特性[12] .....	17
図 1.12 等方的な超伝導体の量子化磁束( $\gamma_z = 1$ ) .....	19
図 1.13 異方的な超伝導体の量子化磁束( $\gamma_z = 1$ ) .....	19
図 2.1 電流密度 $\mathbf{J}$ と磁束密度 $\mathbf{B}$ の定義 .....	23
図 2.2 シミュレーションモデル A .....	25
図 2.3 球状ピン 8 個 .....	26
図 2.4 $z$ 柱状ピン 4 本 .....	27
図 2.5 $y$ 柱状ピン 4 本 .....	28
図 2.6 面状ピン 1 枚 .....	29
図 2.7 超伝導サイズ拡大したシミュレーションモデル B .....	30
図 2.8 球状ピン 162 個 .....	31
図 2.9 $z$ 軸柱状ピン 10 本 .....	32
図 2.10 $y$ 軸柱状ピン 81 本 .....	33
図 2.11 面状ピン 3 枚 .....	34

図 3.1	ピンなしの超伝導体における $J_c$ - $B$ 特性 .....	35
図 3.2	球状ピンにおける $J_c$ - $B$ 特性 .....	36
図 3.3	$z$ 軸柱状ピンにおける $J_c$ - $B$ 特性 .....	37
図 3.4	$y$ 軸柱状ピンにおける $J_c$ - $B$ 特性.....	38
図 3.5	面状ピンにおける $J_c$ - $B$ 特性 .....	39
図 3.6	様々なピンが $B = 0.2$ の場合における $J_c$ - $\theta$ 特性 .....	40
図 3.7	ミュレーションモデル A とシミュレーションモデル B における $J_c$ - $B$ 特性 .....	41
図 3.8	様々なピンの形状における $J_c$ - $B$ 特性( $\gamma_z = 1$ ).....	42
図 3.9	様々なピンの形状における $J_c$ - $B$ 特性( $\gamma_z = 512$ ) .....	43
図 3.10	$z$ 軸柱状ピンにおける $J_c$ - $\theta$ 特性 ( $\gamma_z = 512$ ).....	44
図 3.11	面状ピンにおける $J_c$ - $\theta$ 特性 ( $\gamma_z = 512$ ).....	45

# 表目次

表 2.1 球状ピン 8 個の詳細条件(モデル A) .....	26
表 2.2 z軸柱状ピン 4 本の詳細条件(モデル A) .....	27
表 2.3 y軸柱状ピン 4 本の詳細条件(モデル A).....	28
表 2.4 面状ピン 1 枚の詳細条件(モデル A) .....	29
表 2.5 球状ピン 162 個の詳細条件 (モデル B).....	31
表 2.6 z軸柱状ピン 10 本の詳細条件(モデル B).....	32
表 2.7 y軸柱状ピン 81 本の詳細条件(モデル B) .....	33
表 2.8 面状ピン 3 枚の詳細条件(モデル B).....	34

# 第1章 序論

## 1.1 はじめに

超伝導とは、ある物質を非常に低い温度まで冷却すると電気抵抗がゼロになる現象である。1911年、オランダの Leiden 大学の物理学者である Heike Kamerlingh-Onnes によって、水銀が 4.2 K の低温で電気抵抗がゼロになる現象が発見された[1]。この物質のこの状態を超伝導状態と呼ばれ、今後、超伝導物理学の研究が始まった。

1933年、Meissner と Ochsenfeld が超伝導体の磁気特性を研究していた時、超伝導体に外部磁界  $H_e$  を加えても超伝導内部の磁束密度  $B$  はゼロのまま変化しないという特性が発見された[2]。この特性をマイスナー効果(完全反磁性)という。1935年には F. London と H. London 兄弟によって、超伝導の2つの基本的な特性である電気ゼロ抵抗とマイスナー効果をよく説明したロンドン理論が提案された[3]。

1950年には V.L. Ginzburg と L.D. Landau によって新しい現象論的理論の説明も提案された。これが Ginzburg-Landau 理論である[4]。G-L 理論に導入されたパラメータ  $\kappa$  によって、超伝導体は第1種超伝導体 ( $\kappa < 1/\sqrt{2}$ ) と第2種超伝導体 ( $\kappa > 1/\sqrt{2}$ ) に分類され、第2種超伝導体の電磁特性についても説明された。1957年には Bardeen、Cooper、Schrieffer らの超伝導の微視的理論(略して BCS 理論)により超伝導発現機構が説明された[5]。この理論は、物性物理学や物理学全体の発展に大きな影響を与えるだけでなく、超伝導研究を新たな段階へと導かれる。ついに1986年、ドイツの科学者 Johannes Georg Bednorz と Karl Alex Müller が La-Ba-Cu-O 高温酸化物超伝導体を作成し、その臨界温度  $T_c$  は 35 K に達した[6]。当時の多くの研究者は超伝導転移温度が 30 K を超えることはできないという限界を超えた。この大きな発見は、超伝導の新しい研究分野である高温酸化物超伝導体を切り開くと同時に、世界中の研究者による高温酸化物超伝導材料の研究の急増をもたらした。



## 1.2 超伝導現象

### 1.2.1 完全導電性

温度が一定値を下回ると、超伝導材料が超伝導状態になり、このとき電気抵抗が急になくなり、電流が損失なく伝達される。この温度を臨界温度 ( $T_c$ ) という。その後、 $T_c$ より低い温度で、電流が特定の値を超えて増加し続けると、材料は再び抵抗を示す材料に抵抗を引き起こす最小電流密度は、臨界電流密度 ( $J_c$ ) という。そして、磁場も同様の効果があることがわかり、超伝導を破壊する最小磁場を臨界磁場 ( $H_c$ ) という。この超伝導状態は臨界温度、臨界磁界、臨界電流密度の 3 つの要素によって制限される。この中で、臨界電流密度を大きくすることは超伝導材料の開発においては非常に重要な課題となっている。また、この臨界電流密度  $J_c$  はピン止め効果と強い関係がある。ピン止め効果について、1.5 節に示す。

### 1.2.2 マイスナー効果(完全反磁性)

外部磁場は、超伝導体の内部に侵入したり、広範囲に存在したりすることはできないという特性である。つまり、超伝導体が超伝導状態になると、体内の磁束が完全に体内から排出され、超伝導内部の磁束密度  $B$  が常にゼロになることを意味する。磁束を完全にはじくような超伝導体は、図 1.2 に示すように、第一種超伝導体と呼ばれる。マイスナー効果(図 1.1)は、超伝導状態が熱力学的平衡状態であることを示しており、初期条件やプロセスとは関係ない。最初に冷却してから磁場をかけるか、最初に磁場をかけてから冷却するかは関係なく、超伝導体が超伝導状態に入る限り、すべての磁束が超伝導体から放出される。

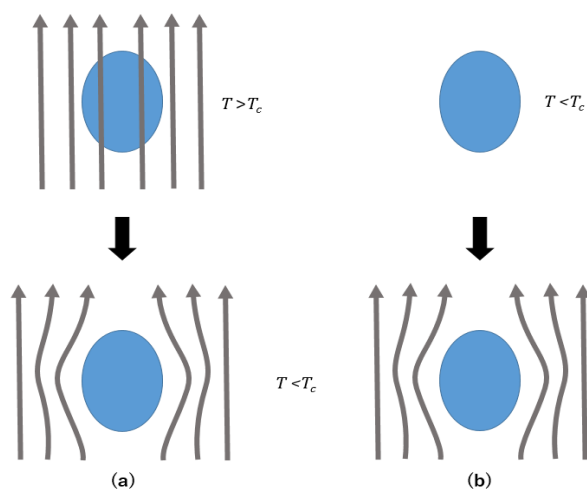


図 1.1 マイスナー効果 (a)  $T_c$ 以上で磁界を加えたのち、 $T_c$ 以下に冷やした場合 (b)  $T_c$ 以下に冷やしてから磁界を加えた場合

その後、Abrikosov は Ginzburg-Landau 理論を使用して、第二種超伝導体の存在を予測した。第二種超伝導体の超伝導領域は、図 1.3 に示すように2つの相に分けられる。 $H < H_{c1}(T)$  (下部臨界磁場) の場合、超伝導体はマイスナー状態になり、超伝導体内部の磁束密度  $B$  はゼロになる。 $H_{c1}(T) < H < H_{c2}(T)$  (上部臨界磁場) の場合、超伝導体は混合状態にあり、磁束線が量子化された状態で超伝導体に侵入する。 $H > H_{c2}(T)$  の場合、超伝導体は通常の状態である。現時点では、混合状態のさらなる分割は実現されていない。

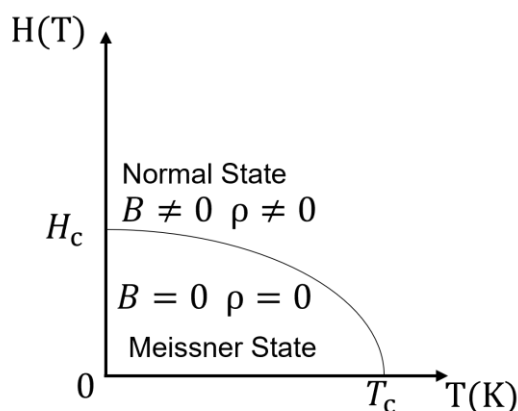


図 1.2 第一種超伝導体の磁場-温度平面上の相図

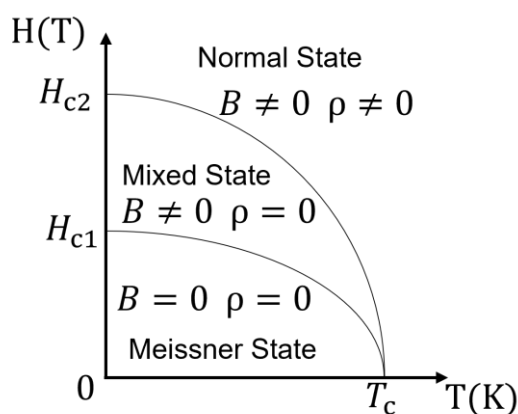


図 1.3 第二種超伝導体の磁場-温度平面上の相図

高温超伝導体の発見により、混合状態には複雑な渦状態があることに気づき、図 1.4 に示すように、不可逆場として知られる不可逆線が発見された。不可逆線は、磁束の動きの強さと超伝導電流の大きさを直接反映している。不可逆線より下では、ピン止め効果により、ローレンツ力が小さく、磁束の動きが不可逆になり、不可逆線より上では、磁束の動きは可逆的である。

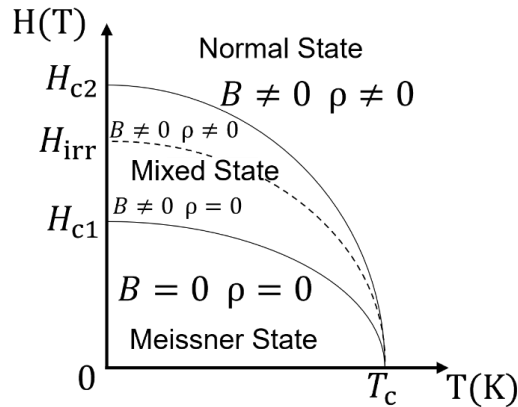


図 1.4 不可逆線の磁場-温度平面上の相図

### 1.3 酸化物超伝導体

電気エネルギーにおける酸化物高温超伝導体の多くの応用（例：磁石コイル、送電ケーブル、変圧器など）は、高い臨界電流密度( $J_c$ )を必要とする。特に液体窒素温度領域では、臨界電流密度( $J_c$ )が高いだけでなく、不可逆磁場( $B_{irr}$ )も高い必要がある。しかし、酸化物高温超伝導体固有の構造異方性や短いコヒーレンス長により、高温超伝導材料の $J_c$ および $B_{irr}$ は、液体窒素温度領域での強力な電氣的用途の要件を満たすことが困難である。したがって、ピン力を改善することは、高温超伝導応用を実現するための最も重要な基本的な問題である。

#### 1.3.1 銅酸化物超伝導体の構造と性質

YBCO 超伝導材料は、二次元構造の特徴を持つペロブスカイト型 $ABO_3$ 酸化銅である[7, 8]。従来の低温超伝導材料と比較して、YBCO 高温超伝導体の超伝導特性は3つの大きく異なる特性を持っている。1つ目は、臨界温度が高いことである。YBCO の $T_c$ が90 Kを超えている、この温度は液体窒素の温度である77 Kからはほど遠いため、液体窒素で正常に動作することができる。2つ目は、非常に短いコヒーレンス長である。3つ目は、高度な異方性を持っている。

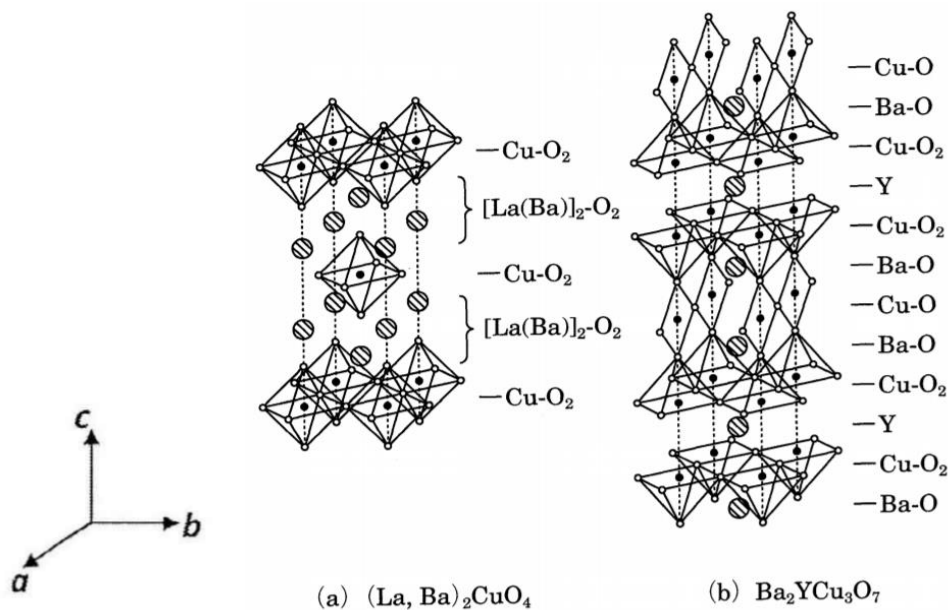


図 1.5 代表的な高温酸化物超伝導体の結晶構造[9]

超伝導材料の構造を図 1.5 に示す。YBCO は直方晶系で、 $c$ 軸方向の格子定数は $a$ 軸と $b$ 軸の約 3 倍であり、 $b$ 軸方向の格子定数は $a$ 方向の格子定数よりわずかに大きい。 $a, b, c$ の格子定数は $3.8117\text{\AA} \times 3.8836\text{\AA} \times 11.6872\text{\AA}$ である。YBCO のコヒーレンス長は非常に短く、 $ab$  面のコヒーレンス長は約 1.2~1.6 nm、 $c$ 軸方向のコヒーレンス長は約 0.15~0.3 nm、異方性比 $\xi_c/\xi_{ab}$ は 5~8 に達する。磁場の侵入深さは比較的大きく、 $ab$ 面は 120~180 nm、 $c$ 軸方向は 500~800 nm、異方性比 $\lambda_c/\lambda_{ab}$ も 5~8 に達する。この YBCO の層状構造により、超伝導特性の臨界磁場、臨界電流密度、侵入深さとコヒーレンス長が強い異方性を示し、これらの値が $ab$ 面に垂直( $c$ 軸方向)な値と $ab$ 面に平行な値が大きく異なる[10, 11]。

## 1.4 磁束線の構造

高温酸化物超伝導体は第二種超伝導体に属する。磁場が十分に高い場合、磁束が量子化された状態で超伝導体内に侵入する。この量子化磁束は、常伝導核とそれを取り巻く渦電流によって形成される。図 1.6 に示すように、孤立した磁束線内のオーダーパラメータ $\Psi$ と磁束密度 $b$ の変化を表している。オーダーパラメータの絶対値の 2 乗が超伝導電子密度に比例するものとする。 $\xi$ は常伝導核の半径、 $\lambda$ は磁界の侵入深さである。また、本研究において、オーダーパラメータの位相に準じて図 1.6 のように色分けする。

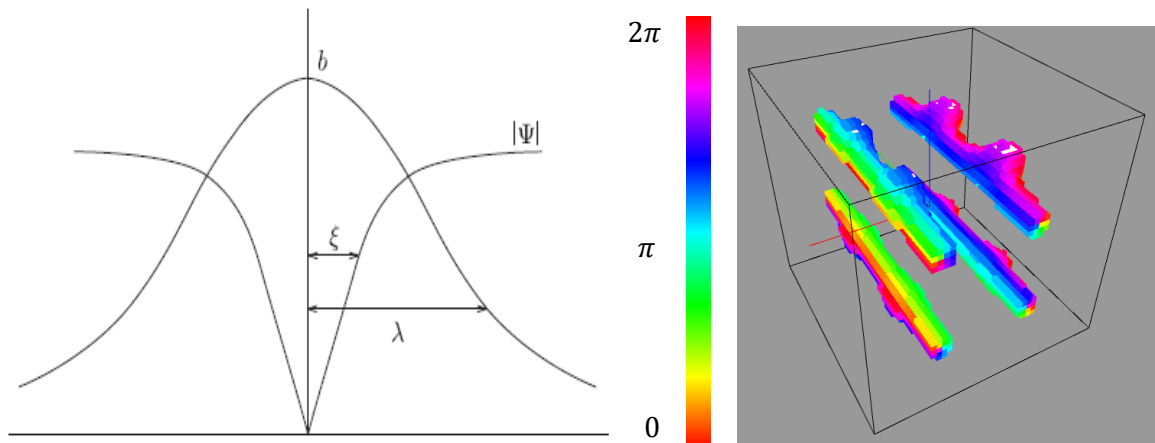


図 1.6 磁束線の構造

## 1.5 磁束ピンニング

第二種超伝導体は、混合状態において超伝導体内に磁束線が侵入している。この状態で電流を流すと、図 1.3 に示すように超伝導体内の量子化磁束にローレンツ力  $\mathbf{F}_L$  が働く。この  $\mathbf{F}_L$  は、

$$\mathbf{F}_L = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (1.1)$$

と表すことができる。なお、 $\mathbf{J}$  は超伝導体内に流す輸送電流密度、 $\mathbf{B}$  は磁束密度である。また、このローレンツ力  $\mathbf{F}_L$  により磁束線が速度  $\mathbf{v}$  で運動した場合、誘導起電力

$$\mathbf{E} = \mathbf{B} \times \mathbf{v} \quad (1.2)$$

が生じる。この誘導起電力  $\mathbf{E}$  によりオーミックな損失が生じ、超伝導体も電気抵抗をもつことになる。電気抵抗ゼロで電流を流すためには、磁束の運動を止めて誘導起電力が生じないようにする必要がある。この磁束運動を止める作用のことを磁束ピンニングという。磁束ピンニングに寄与するものは、常伝導析出物・結晶粒界面・転移などの不均質部分や欠陥である。

単位体積当たりのピンが磁束線に及ぼす力をピン力密度  $\mathbf{F}_p$  とすると、ローレンツ力  $\mathbf{F}_L$  がピン力密度  $\mathbf{F}_p$  を越えなければ磁束は運動をしない。よって、

$$J_c = \frac{F_p}{B} \quad (1.3)$$

という関係がある。なお、臨界電流密度  $J_c$  は電気抵抗ゼロで流せる最大の電流密度である。

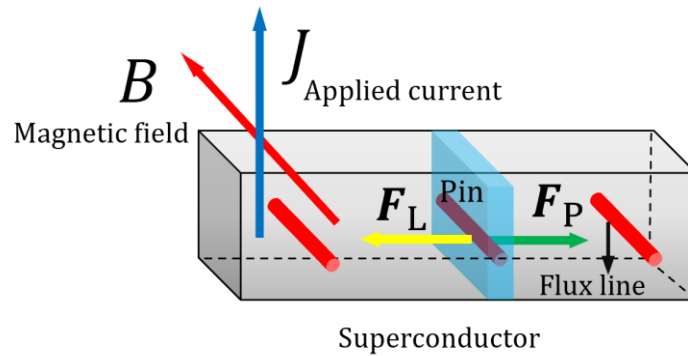


図 1.7 面状ピンを有する超伝導体内の様子。ローレンツ力 $F_L$ と反対方向にピン力密度 $F_P$ が生じ、磁束線の運動が止められている。

### 1.5.1 ピンカ

Londonの磁束線モデルによると、半径が $\xi$ 、体積が $V$ の磁束線は、マイスナー状態から通常状態への遷移するため、エネルギーを供給する必要がある。この $E$ は、

$$E = V \frac{\mu_0}{2} H_c^2 \quad (1.4)$$

で表すことができる。この中で、 $\mu_0$ は真空の導磁率、 $H_c$ は臨界磁場、 $\frac{1}{2}\mu_0 H_c^2$ は凝縮エネルギーである。ここで、磁束線が半径 $r < \xi$ の球状ピンの中にあると仮定する。球状ピンの体積は、

$$V_n = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (1.5)$$

ここで、磁束線が通常の状態に遷移するために必要なエネルギー差が

$$U_0 = \frac{1}{2}\mu_0 H_c^2 V_n = \frac{4\pi\mu_0}{6} H_c^2 r^3 \quad (1.6)$$

である。球状ピンによって形成されるピン力は次の式のように表すことができる。

$$f_p = \frac{U_0}{2\xi} = \frac{\pi\mu_0}{3\xi} H_c^2 r^3 \quad (1.7)$$

この式から、ピン力とピンの体積に強い関係があることが分かる。実際の測定では、 $F_p$ で超伝導材料の磁束ピンニングを評価する。 $F_p$ がピン力密度で、つまり $F_p$ が次の式のように表すことができる。

$$F_p = n_p f_p \quad (1.8)$$

$n_p$ がピン密度である。

### 1.5.2 臨界電流密度

ここでは、単純なモデルを使用して、 $ab$ 面の積層欠陥によって与えられる臨界電流密度 $J_c$ を計算する。

#### ① $H \parallel c$

外部磁場 $H$ の方向が $c$ 軸に平行である場合、直径が数ナノメートル未満の積層欠陥はピンと見なすことができる。直径約 30 nm の積層欠陥の場合、磁束線と積層欠陥が交差する非超伝導領域内の部分のみピンニング効果がある。図 1.8 に示すように、この時全体のエネルギーは

$$E_p = \frac{V\eta H_c^2}{8\pi} \quad (1.9)$$

減少する。ここで、 $V$ は磁束線と積層欠陥が交差する領域の体積であり、 $\eta$ は 1 未満の係数で。この体積は

$$V = \pi \xi_{ab}^2 L \quad (1.10)$$

である。ここで $L$ は $c$ 長軸方向のコヒーレンス長 $2\xi_c$ である。磁束線の半径が $\xi_{ab}$ なので $f_p = \frac{E_p}{2\xi_{ab}}$ 。 $J$ が臨界電流密度 $J_c$ の場合、 $F_p = F_L$ なので、また、(1.1)と(1.4)式により $J_c$ は次の式のように表すことができる。

$$J_c = \frac{\eta n_p H_c^2 \xi_c \xi_{ab}}{8H} \quad (1.11)$$

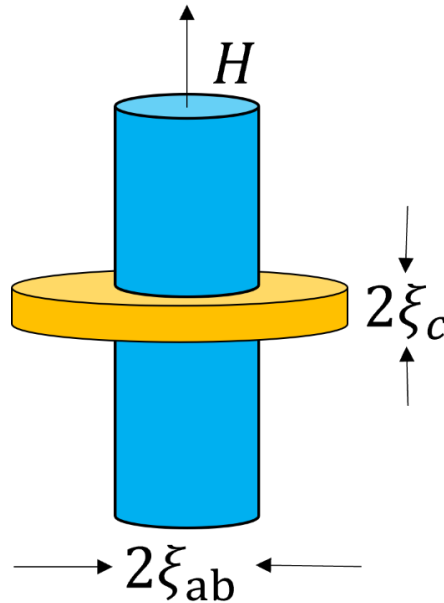


図 1.8 積層欠陥と磁束線のピン止め効果 ( $H \parallel c$ )

## ② $H \parallel ab$

図 1.9 に示すように、外部磁場  $H$  の方向が  $ab$  面に平行である場合、束線と積層欠陥が交差する領域の体積は

$$V = \pi \xi_c \xi_{ab} d \quad (1.12)$$

ここの  $d$  は積層欠陥の長さである。  $H \parallel c$  の状況と似ている、  $f_p = \frac{E_p}{2\xi_c}$  で、簡単な計算で次の式を得ることができる。

$$J_c = \frac{\eta N_p H_c^2 \xi_c d}{4\pi H} \quad (1.13)$$

上記の計算から、ピンの体積や密度が高温超伝導体の臨界電流密度に重要な役割を果たしていることがわかる。したがって、超伝導体を合成する際には、一定の密度と大きさのピンを導入する必要がある。

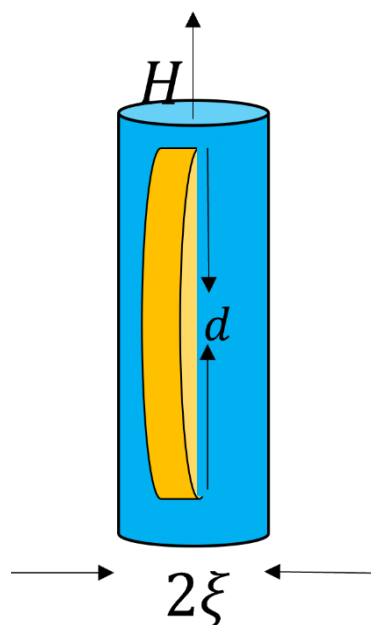


図 1.9 積層欠陥と磁束線のピン止め効果 ( $H \parallel ab$ )

## 1.6 (Time-Dependent) Ginzburg-Landau 方程式

### 1.6.1 Ginzburg-Landau(G-L)方程式

Ginzburg-Landau(G-L)理論は、1950 年に Vitaly Lazarevich Ginzburg と Lev Davidovich Landau によって発表された超伝導を説明する現象論である。この G-L 理論は、磁場と超伝導が共存している問題を取り扱う [12]。

まず、複素数のオーダーパラメータ  $\Psi$  を定義する。この時、  $|\Psi|^2$  が超伝導電



子密度 $n_s$ を与えるものとする。超伝導体の自由エネルギー $E_s$ は超伝導電子 $n_s$ に依存しており、 $|\Psi|^2$ の関数である。ここで、転移点近傍において $|\Psi|^2$ は小さいと期待でき、

$$E_s = E_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 \quad (1.14)$$

と $|\Psi|^2$ べき展開ができる。なお、 $E_n$ は常伝導状態の自由エネルギーである。

次に、磁場の存在によりオーダーパラメータが空間的に変化することを考慮する。運動エネルギー密度は、

$$\frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})\Psi|^2 \quad (1.15)$$

と書ける。 $e^*$ は超伝導電子の電荷である。さらに磁場のエネルギー密度も含め、

$$E_s = E_n + \alpha|\Psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi|^4 + \frac{1}{2\mu_0}(\nabla \times \mathbf{A})^2 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})\Psi|^2 \quad (1.16)$$

と書ける。 $\mu_0$ は真空中の透磁率、 $\mathbf{A}$ はベクトルポテンシャル、 $m^*$ は超伝導電子の質量である。ここで、 $\Psi$ と $\mathbf{A}$ について変分法を適用する。

$$\frac{\delta E_s}{\delta \Psi^*} = \frac{\partial E_s}{\partial \Psi^*} - \left[ \nabla \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \nabla \Psi^*} \right] = 0 \quad (1.17)$$

$$\frac{\delta E_s}{\delta \mathbf{A}} = \frac{\partial E_s}{\partial \mathbf{A}} - \left[ \nabla \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \nabla \mathbf{A}} \right] = 0 \quad (1.18)$$

この(1.17)式と(1.18)式を解くと、

$$\frac{1}{2m^*}(-i\hbar\nabla + e^*\mathbf{A})^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0 \quad (1.19)$$

$$\frac{1}{\mu_0}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{i\hbar e^*}{2m^*}(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*}|\Psi|^2\mathbf{A} \quad (1.20)$$

となる。この2式をG-L方程式という。

## 1.6.2 Time-Dependent Ginzburg-Landau(TDGL)方程式

G-L方程式を時間発展させたものが、Time-Dependent Ginzburg-Landau(TDGL)方程式である。(1.17)、(1.18)式を時間発展すると、

$$\frac{\delta E_s}{\delta \Psi^*} = \frac{\partial E_s}{\partial \Psi^*} - \left[ \nabla \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \nabla \Psi^*} \right] = -\gamma \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1.21)$$

$$\frac{\delta E_s}{\delta \mathbf{A}} = \frac{\partial E_s}{\partial \mathbf{A}} - \left[ \nabla \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \nabla \mathbf{A}} \right] = -v \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.22)$$

なお、 $\gamma$ と $v$ はそれぞれ $\Psi$ と $\mathbf{A}$ の時定数である。更にゲージ変換を与えると、

$$\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rightarrow \left( \hbar \frac{\partial}{\partial t} + ie^* V \right) \Psi \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \quad (1.24)$$

なお、 $V$ はスカラーポテンシャルである。(1.23)、(1.24)式に(1.21)、(1.22)式を代入すると、

$$\gamma \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + ie^* V \Psi \right) + \frac{1}{2m^*} (-i\hbar \nabla + e^* \mathbf{A})^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 \Psi = 0 \quad (1.25)$$

$$v \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla V \right) + \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} + \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} = 0 \quad (1.26)$$

となる。

### 1.6.3 TDGL 方程式の簡易化

細線近似と規格化により、TDGL 方程式を簡易化する[13, 14]。

細線近似では、非常に細い超伝導線(以降 SC ナノワイヤと記す)に外部磁界  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  を印加した際、SC ナノワイヤ全体に  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  が侵入すると仮定する。よって、 $\mathbf{A}$  は  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  にのみ依存する変数となる。本研究では  $\mathbf{B}_{\text{ext}}$  は一定とする為、(1.26)式は左辺第一項の時間偏微分が 0 となり一定となる。

次に、(1.25)、(1.26)式に対して規格化を行う。コヒーレンス長  $\xi$  と磁場侵入長  $\lambda$  は熱力学的臨界磁場を  $H_c$  として、

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2m^* |\alpha|}} \quad (1.27)$$

$$\lambda = \frac{e^* \mu_0 H_c}{\sqrt{m^* |\alpha|}} \quad (1.28)$$

と表す。そして、(1.29) – (1.33)式に記す規格化を行う。

$$\xi \nabla \rightarrow \nabla \quad (1.29)$$

$$\frac{|\alpha|}{\gamma} t \rightarrow t \quad (1.30)$$

$$\frac{e^* \gamma}{|\alpha|} V \rightarrow V \quad (1.31)$$

$$\frac{\lambda}{\sqrt{2\mu_0 H_c}} \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} \quad (1.32)$$

$$\left(\frac{\beta}{|\alpha|}\right)^{\frac{1}{2}} \Psi \rightarrow \Psi \quad (1.33)$$

よって、(1.25)式左辺第一項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \gamma \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} + ie^* V \Psi \right) &\rightarrow \gamma \left[ \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\gamma}{|\alpha|} t \right)} \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi + ie^* \left( \frac{|\alpha|}{e^* \gamma} V \right) \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \right] \\ &= \gamma \left[ \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial \left( \frac{\gamma}{|\alpha|} t \right)} + i \frac{|\alpha|}{\gamma} \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} V \Psi \right] \\ &= \gamma \left[ \frac{1}{\gamma} |\alpha| \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{1}{\gamma} |\alpha| \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} i V \Psi \right] \\ &= |\alpha| \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial t} + i V \Psi \right] \end{aligned} \quad (1.34)$$

また、(1.25)式左辺第二項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m^*} (-i\hbar \nabla + e^* \mathbf{A})^2 \Psi &\rightarrow \frac{1}{2m^*} \left( -i\hbar \frac{\nabla}{\xi} - e^* \frac{\sqrt{2\mu_0 H_c}}{\lambda} \mathbf{A} \right)^2 \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \\ &= \left( -i\hbar \frac{1}{\sqrt{2m^* \xi}} \nabla - e^* \frac{\sqrt{2\mu_0 H_c}}{\sqrt{2m^* \lambda}} \mathbf{A} \right)^2 \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \\ &= \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \left( -i\hbar \frac{\sqrt{2m^* |\alpha|}}{\sqrt{2m^* \hbar}} \nabla - e^* \frac{\sqrt{2\mu_0 H_c} \sqrt{m^* |\alpha|}}{\sqrt{2m^* e^* \mu_0 H_c}} \mathbf{A} \right)^2 \Psi \\ &= |\alpha| \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} (-i\nabla - \mathbf{A})^2 \Psi \end{aligned} \quad (1.35)$$

(1.25)式左辺第三項は次のようになる。

$$\alpha\Psi \rightarrow \alpha\left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi \quad (1.36)$$

(1.25)式左辺第四項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \beta|\Psi|^2\Psi &\rightarrow \beta\left|\left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi\right|^2\left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\Psi \\ &= |\alpha|\left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}|\Psi|^2\Psi \end{aligned} \quad (1.37)$$

(1.34)–(1.37)式をまとめると、(1.36)式右辺の $\alpha$ は負で、

$$\alpha\left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t} + iV\Psi + (-i\nabla - \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi\right] = 0 \quad (1.38)$$

となる。次に、(1.38)式の両辺を $\alpha\left(\frac{|\alpha|}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}}$ で割る。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial t} + iV\Psi + (-i\nabla - \mathbf{A})^2\Psi - \Psi + |\Psi|^2\Psi = 0 \quad (1.39)$$

同様に、(1.26)式も簡易化する。(1.26)式左辺第一項は $\mathbf{A}$ が一定として、

$$\begin{aligned} v\nabla V &\rightarrow v\frac{1}{\xi}\nabla\frac{|\alpha|}{e^*\gamma}V \\ &= \frac{|\alpha|}{\xi e^*\gamma}v\nabla V \\ &= \frac{\sqrt{2m^*|\alpha|}}{\hbar} \cdot \frac{|\alpha|}{e^*\gamma}v\nabla V \end{aligned} \quad (1.40)$$

となる。

(1.26)式左辺第二項は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} &\rightarrow \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{1}{\xi}\nabla \times \frac{1}{\xi}\nabla \times \frac{\sqrt{2}\mu_0 H_c}{\lambda}\mathbf{A} \\ &= \frac{\sqrt{2}H_c}{\xi^2\lambda}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{2m^*|\alpha|}{\hbar^2} \cdot \frac{\sqrt{m^*|\alpha|}}{e^*\mu_0 H_c} \cdot \sqrt{2}H_c\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \frac{2\sqrt{2}m^*|\alpha|\sqrt{m^*|\alpha|}}{\hbar^2 e^*\mu_0}\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.41)$$

(1.26)式左辺第三項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{i\hbar e^*}{2m^*} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \\
& \rightarrow \frac{i\hbar e^*}{2m^*} \left\{ \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi^* \frac{1}{\xi} \nabla \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi - \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \frac{1}{\xi} \nabla \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi^* \right\} \\
& = \frac{i\hbar e^*}{2m^*} \cdot \frac{|\alpha|}{\beta} \cdot \frac{1}{\xi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \\
& = \frac{i\hbar e^*}{2m^*} \cdot \frac{|\alpha|}{\beta} \cdot \frac{\sqrt{2m^*|\alpha|}}{\hbar} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \\
& = \frac{ie^*|\alpha|\sqrt{2m^*|\alpha|}}{2m^*\beta} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \tag{1.42}
\end{aligned}$$

(1.26)式左辺第四項は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A} & \rightarrow \frac{e^{*2}}{m^*} \left| \left( \frac{|\alpha|}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} \Psi \right|^2 \frac{\sqrt{2}\mu_0 H_c}{\lambda} \mathbf{A} \\
& = \frac{e^{*2}}{m^*} \cdot \frac{|\alpha|}{\beta} \cdot \frac{\sqrt{2}\mu_0 H_c}{\lambda} |\Psi|^2 \mathbf{A} \\
& = \frac{e^{*2}}{m^*} \cdot \frac{|\alpha|}{\beta} \cdot \sqrt{2}\mu_0 H_c \cdot \frac{\sqrt{m^*|\alpha|}}{e^*\mu_0 H_c} |\Psi|^2 \mathbf{A} \\
& = \frac{e^*|\alpha|\sqrt{2m^*|\alpha|}}{m^*\beta} |\Psi|^2 \mathbf{A} \tag{1.43}
\end{aligned}$$

(1.40) – (1.43)式をまとめると、

$$\begin{aligned}
& \frac{2\sqrt{2}m^*|\alpha|\sqrt{m^*|\alpha|}}{\hbar^2 e^* \mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\
& = \frac{e^*|\alpha|\sqrt{2m^*|\alpha|}}{m^*\beta} \left\{ |\Psi|^2 \mathbf{A} - \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right\} - \frac{\sqrt{2m^*|\alpha|}}{\hbar} \cdot \frac{|\alpha|}{e^*\gamma} \nu \nabla \nabla \mathbf{A} \tag{1.44}
\end{aligned}$$

となる。次に、(1.44)式の両辺を $|\alpha|\sqrt{2m^*|\alpha|}$ で割ると、

$$\frac{2m^*}{\hbar^2 e^* \mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \frac{e^*}{m^*\beta} \left\{ |\Psi|^2 \mathbf{A} - \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right\} - \frac{1}{\hbar e^* \gamma} \nu \nabla \nabla \mathbf{A} \tag{1.45}$$

となる。

ここで、TDGL 方程式を $\Psi$ 、 $V$ について解く。しかし、変数 2 つに対し方程式が(1.39)式のみである為、電流の発散の式を第二の方程式として解く。

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (1.46)$$

ここで、

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.47)$$

である。(1.45)式の両辺に $\nabla$ と内積を取ると、

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla \cdot \left[ \frac{e^*}{m^* \beta} \left\{ |\Psi|^2 \mathbf{A} - \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) \right\} - \frac{1}{\hbar e^* \gamma} v \nabla V \right] \\ &\leftrightarrow \frac{e^*}{m^* \beta} \left\{ \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) - \nabla \cdot (|\Psi|^2 \mathbf{A}) \right\} = -\frac{1}{\hbar e^* \gamma} v \nabla^2 V \\ &\leftrightarrow \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) - \nabla \cdot (|\Psi|^2 \mathbf{A}) = -\frac{m^* \beta}{\hbar e^* \gamma} v \nabla^2 V \\ &\leftrightarrow \sigma \nabla^2 V = \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \Psi^*) - \nabla \cdot (|\Psi|^2 \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (1.48)$$

となる。ここで、 $-\frac{m^* \beta}{\hbar e^* \gamma} v \rightarrow \sigma$ とする。 $\sigma$ は常伝導領域の導電率である。本研究

では、(1.39)式と(1.48)式について数値解析を行う。

次に、SC ナノワイヤの対破壊電流密度 $J_d$ を考える。1次元のGL方程式は $\Psi(x) = f \exp(iqx)$ に対して $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ として、(1.39)式より

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 \Psi + (1 - |\Psi|^2) \Psi \\ &= \frac{d^2}{dx^2} (f e^{iqx}) + (1 - f^2) f e^{iqx} \\ &= (-q^2 + 1 - f^2) f e^{iqx} \end{aligned} \quad (1.49)$$

よって、

$$f = 1 - q^2 \quad (1.50)$$

が成り立つ。このパラメータ $f$ と $q$ は $J_s$ から決定される。

$$\begin{aligned} J_s &= |\Psi|^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ &= f^2 q \\ &= q(1 - q^2) \end{aligned} \quad (1.51)$$

ここで、 $q(1 - q^2)$ は $q = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$ のとき最大値 $\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.385$ を取るため次の不等式が言える。

$$J_s \leq J_d = \frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.385 \quad (1.52)$$

(1.52)式から分かるように、 $J$ を約 0.385 以上印加した場合 $J_d$ を超えた電流を流していることになる為、注意する必要がある。

## 1.7 近接効果

本研究では超伝導領域の内部に様々な常伝導析出物（ピン）を挿入するが、超伝導体とピンが接触している時、超伝導電子がピン側に染み出し、ピンが超伝導性を示す現象を近接効果という[15]。

ピン領域では、(1.39)式に代わり以下の式を解く[16, 17]。

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + iV\Psi + (-i\nabla - \mathbf{A})^2\Psi + \eta\Psi = 0 \quad (1.53)$$

ここで、 $\eta = \sqrt{\xi/\xi_n}$ である。また、 $\xi_n$ はピン領域のコヒーレンス長である。一方、ピン領域に超伝導電子が染み出さない理想的なピンを考慮した場合、(1.48)式に代わり、

$$\Psi = 0 \quad (1.54)$$

とする。

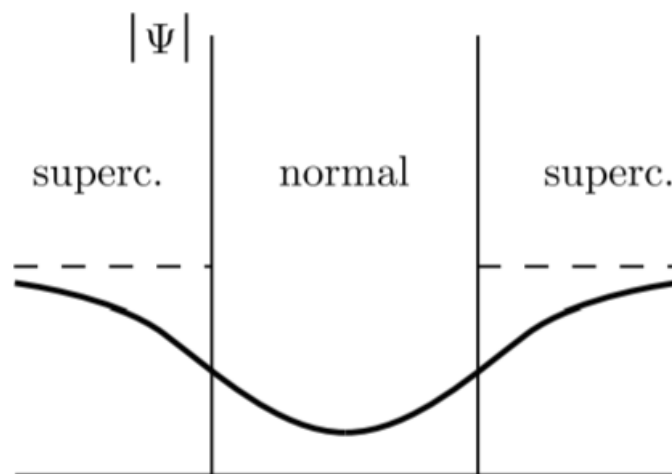


図 1.10 超伝導体と常伝導体（ピン）が接触している状態[18]

## 1.8 ピーク効果

通常、臨界電流密度 $J_c$ は磁場 $B$ が増加するにつれて単調減少する。しかし、

何らかの要因により $J_c$ がピークを持つ。この現象をピーク効果という[12]。ピーク効果をもたらす要因として、マッチング機構がある。このマッチング機構とは、磁束線格子間隔 $a_f$ とピンの間隔 $d$ が一致する磁場において臨界電流密度 $J_c$ が極大となるものである。図 1.5 に示す Pb-Bi 薄膜の $J_c$ - $B$ 特性では、磁場 $H_1$ においてピークが出現している。この時、Bi 濃度の周期( $2a$ )と磁束線格子間隔が一致している。

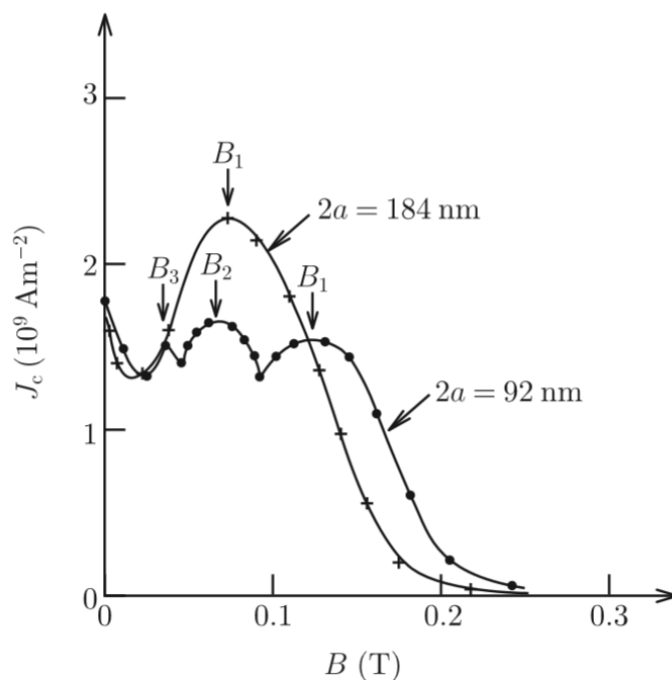


図 1.11 Bi 濃度を周期的に変えてピンを導入した Pb-Bi 薄膜の $J_c$ - $B$ 特性[12]

## 1.9 超伝導体の異方性

高温超伝導体は、結晶軸の方向により特性が異なる。この異なる特性（異方性）は、エネルギーギャップ・磁場侵入長・コヒーレンス長などがある。

本研究では、有効質量・有効導電率モデルを用いて超伝導体の異方性を再現する。

### 1.9.1 有効質量・有効導電率モデル

異方性を有する超伝導体内のふるまいを観測する際、電子質量および導電率が見かけ上、軸ごとに異なっていると考えることができる[19]。この見かけの



質量および導電率を、有効質量と有効導電率といい、

$$m^* \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_z^2 \end{pmatrix} m^* \quad (1.55)$$

$$\sigma \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_z^2} \end{pmatrix} \sigma \quad (1.56)$$

と表すことができる。なお、 $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ はそれぞれ $x, y, z$ 軸方向の異方性であり、各軸への異方性パラメータという。

ここで、オーダーパラメータに関する式に異方性パラメータを反映する。(1.39)式の左辺第三項は、

$$(-i\nabla - \mathbf{A})^2 \psi \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} + \frac{\left(-i\frac{\partial}{\partial x} - A_x\right)^2}{\gamma_x^2} \\ + \frac{\left(-i\frac{\partial}{\partial y} - A_y\right)^2}{\gamma_y^2} \\ + \frac{\left(-i\frac{\partial}{\partial z} - A_z\right)^2}{\gamma_z^2} \end{array} \right\} \psi \quad (1.57)$$

次に、スカラーポテンシャルに関する式を考える。(1.48)式は、

$$\begin{aligned} & \sigma \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_z^2} \end{pmatrix} \nabla^2 V \\ &= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_z^2} \end{pmatrix} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*) \end{aligned}$$

$$-\nabla \cdot |\Psi|^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\gamma_x^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\gamma_y^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\gamma_z^2} \end{pmatrix} \mathbf{A} \quad (1.58)$$

このように異方性を導入した場合、量子化磁束の構造は図 1.13 のようになる。なお、オーダーパラメータ $\Psi$ の位相により色分けし、パンケーキ状の磁束を再現できている。また、等方的な超伝導体の量子化磁束を図 1.12 の示すように、一様な磁束となる。

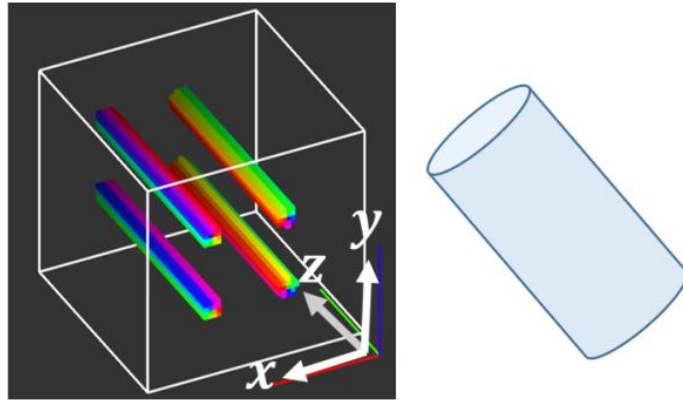


図 1.12 等方的な超伝導体の量子化磁束( $\gamma_z = 1$ )

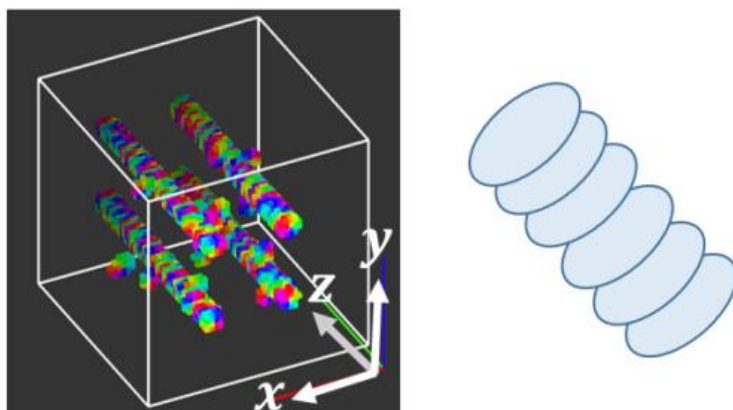


図 1.13 異方的な超伝導体の量子化磁束( $\gamma_z = 512$ )

## 1.10 目的

超伝導材料の工業的な応用において、臨界電流密度を大きくすることは、非常に重要な課題である。そのため、より大きな $J_c$ が得られる超伝導体を調査する研究が求められている。

第 2 種超伝導体の臨界電流密度 $J_c$ は磁界の方向に大きく依存することが実験で確認されている。その上、超伝導体内の磁束線を留めるピンについての様々な条件の違いによって臨界電流密度 $J_c$ が変化することが知られている。しかし、理論的に確認したケースは少ない。そこで、本研究では 3 次元の TDGL 方程式を数値的に解くことで、様々な磁界下での超伝導体内の量子化磁束線の動きを可視化し、超伝導体内の磁束運動についてシミュレーションを行う。シミュレーションを用いて解析を行う場合、ピンの条件を自在に定義できる利点がある。さらに、近年ではコンピュータの処理速度の向上もあり、ピンについての様々な条件について解析する場合について非常に合理的である。

本研究では、TDGL 方程式を用いたシミュレーションにおいて、超伝導体内のピン条件を変更し臨界電流密度 $J_c$ がどのように変化するか調査する。先行研究では、高温酸化物超伝導体のような異方的特性を持つ超伝導体を様々なピンの条件で $J_c$ - $B$ 特性を調査した[20]。ただし、先行研究では磁界方向を考慮していない。磁束線が軸方向と実用される超伝導体は、様々な方向で磁束線が量子化された状態で超伝導体内に侵入する。先行研究では、磁界を $z$ 軸に平行な方向で印加し、本研究では、電流を $y$ 軸と平行に流し、磁界を $z$ 軸 ( $c$ 軸と平行) から $x$ 軸 ( $ab$ 面と平行) に回転し、様々な方向で印加する。

そこで、本研究では様々な磁界方向における異方性を考慮した超伝導体の 3 次元量子化磁束構造の研究を行った。異方性を持つ超伝導体の $J_c$ は、磁界の印加方向によって大きく異なる。磁界が $c$ 軸方向と平行で印加する時 $J_c$ は低く、 $ab$ 面と平行で印加する時 $J_c$ が大きくなるという問題点がある。解決方法として、ピンの挿入によって、様々な磁界方向において一定の $J_c$ が保たれることが考えられる。ピンの形状、配置により効果に変化する為、様々な磁界方向で様々な形状のピンにおける $J_c$ - $\theta$ 特性について詳しく調査する。

## 第2章 計算手法

### 2.1 主要アルゴリズム

#### 2.1.1 ガウス=ザイデル法

ガウス=ザイデル法とは、連立一次方程式を反復法で解く方法の 1 つである [21, 22]。反復法とは、繰り返し計算を行い真の解へ近づける方法で、並列計算に適している。まず、連立一次方程式を

$$Ax = b \quad (2.1)$$

とする。ここで、 $A$ は $n$ 次正方行列、 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{b}$ は $n$ 次元のベクトルである。

ガウス=ザイデル法は、

$$a_{ii}x_i^{k+1} = \left( b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^k \right) \quad (2.2)$$

と定義される[23]。

#### 2.1.2 オイラー法

オイラー法とは、常微分方程式を解く方法の 1 つである。導関数の定義式

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) = \lim_{\Delta t} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (2.3)$$

が元となっている。ここで、 $\Delta t$ が十分小さいと仮定し以下のように差分商で置き換える。

$$f(t, x) = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (2.4)$$

これより、ある時刻 $t$ から $\Delta t$ だけ時間が経過した変数の値 $x(t + \Delta t)$ は、

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \cdot f(t, x) \quad (2.5)$$

となる。刻み幅 $\Delta t$ が十分小さい場合は、比較的精度の高い近似解を得ることができる。しかし、 $\Delta t$ を小さくすると数多くのステップを繰り返し計算する為、丸め誤差の蓄積があることに注意する必要がある[21, 23]。

### 2.1.3 二分探索法

二分探索法とは、ソート済み配列に対する探索アルゴリズムの 1 つである。ここで探索とは、多くのデータの中から目的とするデータ  $x$  を見つけることを意味する。二分探索法では、ソート済み配列の中央のデータと、目的とするデータ  $x$  の大小関係を比較し探索していく。中央のデータが  $x$  より小さい場合、 $x$  は中央のデータより右側の配列にしか存在しないので、探索範囲をその部分に限定する。中央のデータが  $x$  より大きい場合、 $x$  は中央のデータより左側の配列にしか存在しないので、探索範囲をその部分に限定する。目的とするデータと等しいデータを見つけるまで、繰り返し探索を行う [24]。

## 2.2 計算条件

### 2.2.1 電流密度 $J$ と外部磁束密度 $B$ の条件

SC ナノワイヤに与える電流密度  $J$  と磁束密度  $B$  は図 2.1 に示すように、

$$J = J_y \mathbf{i}_y \quad (2.6)$$

$$B = \begin{pmatrix} B_{ext} \sin \theta \\ 0 \\ B_{ext} \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

と定義する。

計算する超伝導体の条件を図 2.1 に示す、電流を  $y$  軸と平行に流し、磁界を  $x$  軸と平行に流します。ここでは外部磁界  $B = 0.1, 0.2, \dots, 0.6$ 、電流密度  $J = 0.01, 0.02, \dots, 0.385$ 、 $z$  軸の異方性  $\gamma_z = 1, 512$  で計算を行った。

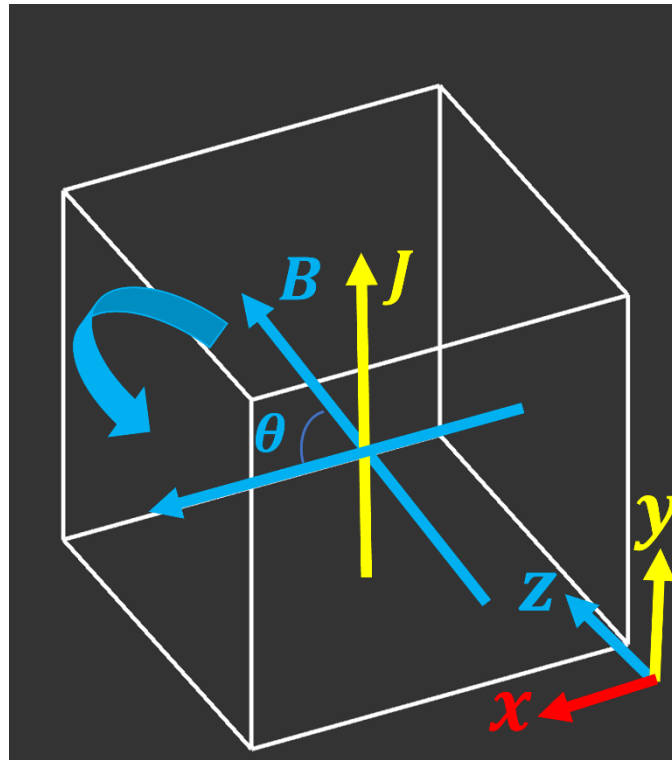


図 2.1 電流密度  $J$  と磁束密度  $B$  の定義

### 2.2.2 オーダーパラメータ $\Psi$ とスカラーポテンシャル $V$ の初期条件

オーダーパラメータ  $\Psi$  とスカラーポテンシャル  $V$  の初期条件は、

$$\Psi(t = 0) = \cos\theta + i \cdot \sin\theta \quad (2.8)$$

$$V(t = 0) = -\frac{J_y \cdot y}{\sigma} \quad (2.9)$$

と定義する。なお、 $\theta$  はオーダーパラメータ  $\Psi$  の位相である。初期値は  $0 \leq \theta < 2\pi$  の範囲で乱数によって決定される。

### 2.2.3 境界条件

本研究では、真空中に囲まれた超伝導体を取り扱う。超伝導体から真空へ電流が流入及び流出しないという境界条件を与える。

ここで、超伝導電流密度  $J_s$  の  $x$  成分を考慮し、 $x$  方向の単位面ベクトル  $\mathbf{n}_x$  との内積を 0 と置くことでこの条件を求める。(1.12)式より、

$$J_s = \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - |\Psi|^2 \mathbf{A} \quad (2.10)$$

となる。また、 $\Psi = \Psi_R + i\Psi_I$ 、 $\Psi^* = \Psi_R - i\Psi_I$  として  $x$  成分において展開する。

$$\begin{aligned}
& \left. \left\{ \frac{i}{2} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) - |\Psi|^2 A \right\} \right|_x \\
&= \frac{i}{2} \left\{ \begin{aligned} & +(\Psi_R - i\Psi_I) \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_R + i\Psi_I) \\ & -(\Psi_R + i\Psi_I) \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_R - i\Psi_I) \end{aligned} \right\} - (\Psi_R^2 + \Psi_I^2) \cdot A_x \\
&= \frac{i}{2} \begin{pmatrix} +\Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R + i\Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I \\ -i\Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R + \Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I \\ -\Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R + i\Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I \\ -i\Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R - \Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I \end{pmatrix} - \Psi_R^2 A_x - \Psi_I^2 A_x \\
&= \Psi_I \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R - \Psi_R \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I - \Psi_R^2 A_x - \Psi_I^2 A_x \\
&= \Psi_I \left( \frac{\partial}{\partial x} \Psi_R - \Psi_I A_x \right) - \Psi_R \left( \frac{\partial}{\partial x} \Psi_I + \Psi_R A_x \right) \tag{2.11}
\end{aligned}$$

(2.11)式が0になる為には、

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi_R - \Psi_I A_x = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi_I + \Psi_R A_x = 0 \tag{2.13}$$

という条件を満たせば良い。この2式をまとめると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \Psi + iA_x \Psi = 0 \tag{2.14}$$

超伝導体と真空の全ての境界は、(2.14)式を元に同様の手順で求めることができる。

$$\nabla \Psi + iA \Psi = 0 \tag{2.15}$$

続いて、スカラーポテンシャル $V$ の境界条件を定義する。 $y$ 方向の境界面において、

$$\nabla V = -\frac{J}{\sigma} \tag{2.16}$$

とする。

## 2.3 シミュレーションモデル A $(x, y, z) = (10, 10, 10)$

シミュレーションモデル A は図 2.2 に示す。真空中の超伝導細線はコヒーレンス長 $\xi$ で規格化したサイズにおいて、辺の長さが $10\xi, 10\xi, 10\xi$ の直方体を仮定する。結晶構造上の $a, b, c$ 軸を、シミュレーション上の $x, y, z$ 軸とする。また、ピン内部では強制的に超伝導電子密度が 0 となるようにした。シミュレーションモデル A は図 2.2 に示す。

メッシュ数は、空間離散幅 $h = 0.2$ と定義しているので、

$$\begin{aligned} \left(\frac{10}{0.2}\right)^3 &= 50^3 \\ &= 125000 \end{aligned} \tag{2.17}$$

である。

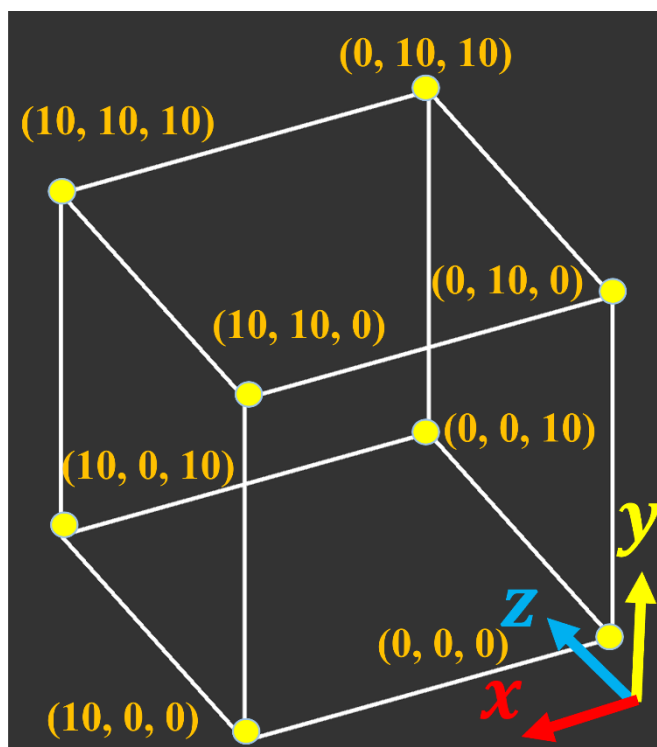


図 2.2 シミュレーションモデル A



### 2.3.1 球状ピン 8 個

図 2.3 に球状ピンを示す。表 2.1 に球状ピン 8 個の詳細条件を示す。

表 2.1 球状ピン 8 個の詳細条件(モデル A)

	ピン位置( $x, y, z$ )	ピン半径 $r$	ピン距離 $d$
ピン 1	(3, 3, 3)	0.5	4
ピン 2	(3, 3, 7)		
ピン 3	(3, 7, 3)		
ピン 4	(3, 7, 7)		
ピン 5	(7, 3, 3)		
ピン 6	(7, 3, 7)		
ピン 7	(7, 7, 3)		
ピン 8	(7, 7, 7)		

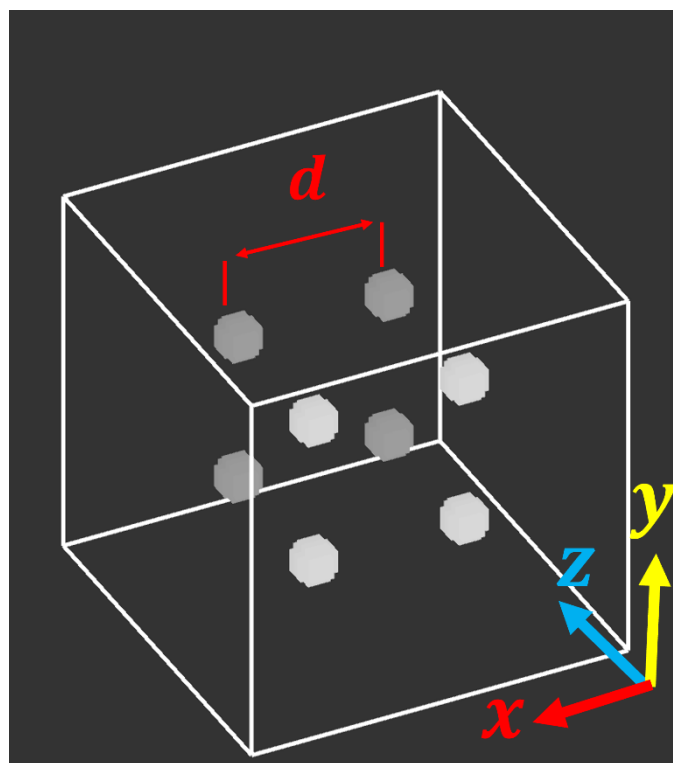


図 2.3 球状ピン 8 個

### 2.3.2 z軸柱状ピン4本

図 2.4 に柱状ピンを示す。表 2.2 にz軸柱状ピン4本の詳細条件を示す。

表 2.2 z軸柱状ピン4本の詳細条件(モデル A)

	ピン位置( $x, y$ )	ピン半径 $r$	ピン距離 $d$
ピン 1	(3, 3)	0.5	4
ピン 2	(3, 7)		
ピン 3	(7, 3)		
ピン 4	(7, 7)		

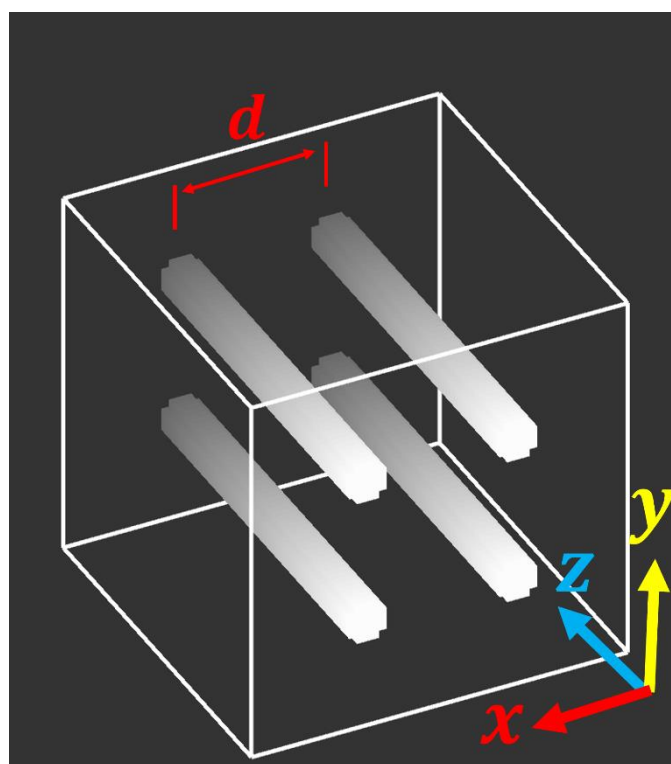


図 2.4 z柱状ピン4本

### 2.3.3 y軸柱状ピン4本

図 2.4 に柱状ピンを示す。表 2.2 にy軸柱状ピン4本の詳細条件を示す。

表 2.3 y軸柱状ピン4本の詳細条件(モデル A)

	ピン位置( $x, z$ )	ピン半径 $r$	ピン距離 $d$
ピン 1	(3, 3)	0.5	4
ピン 2	(3, 7)		
ピン 3	(7, 3)		
ピン 4	(7, 7)		

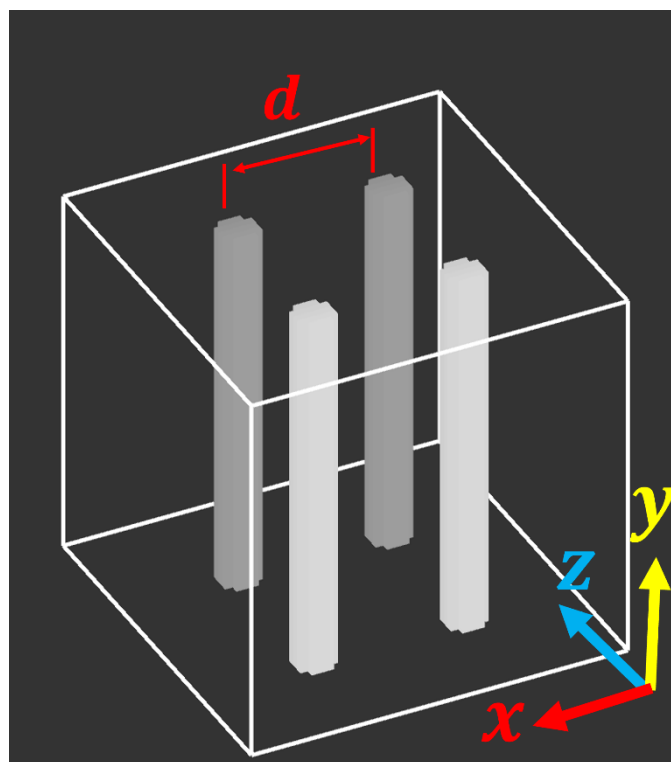


図 2.5 y柱状ピン4本

### 2.3.4 面状ピン 1 枚

図 2.6 に面状ピンを示す。表 2.4 に面状 1 枚の詳細条件を示す。

	ピン位置( $x$ )	ピンの厚さ
ピン 1	(5.5)	0.6

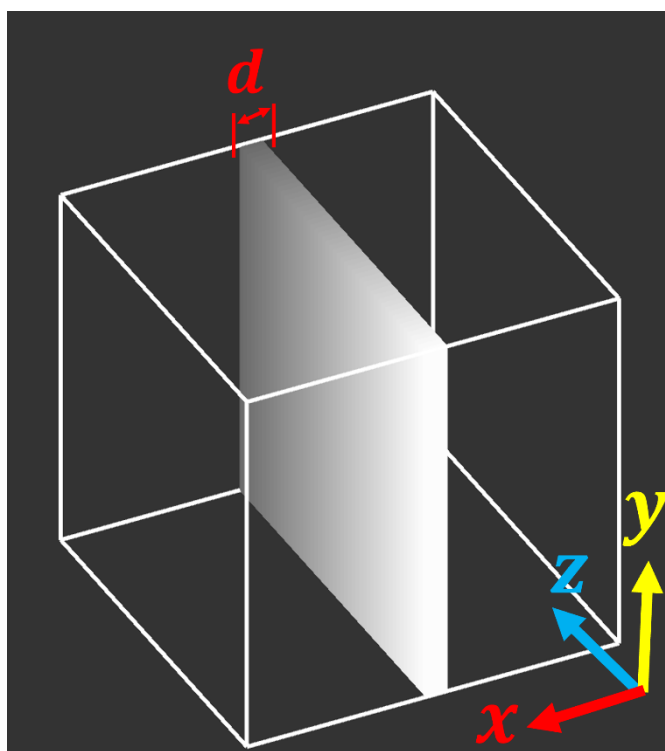


図 2.6 面状ピン 1 枚

## 2.4 シミュレーションモデル B $(x, y, z) = (40, 10, 40)$

2.3 節で紹介したモデル A は、超伝導体の大きさが  $(x, y, z) = (10, 10, 10)$  であった。しかし、空間が小さいことが原因で、超伝導-真空境界面による影響を大きく受けていた。

シミュレーションモデル B は図 2.3 に示す。真空中の超伝導細線はコヒーレンス長  $\xi$  で規格化したサイズにおいて、辺の長さが  $40\xi, 10\xi, 40\xi$  の直方体を仮定する。結晶構造上の  $a, b, c$  軸を、シミュレーション上の  $x, y, z$  軸とする。

メッシュ数は、空間離散幅  $h = 0.2$  と定義しているので、

$$\left(\frac{40}{0.2}\right) \times \left(\frac{10}{0.2}\right) \times \left(\frac{40}{0.2}\right) = 2000000 \quad (2.18)$$

である。

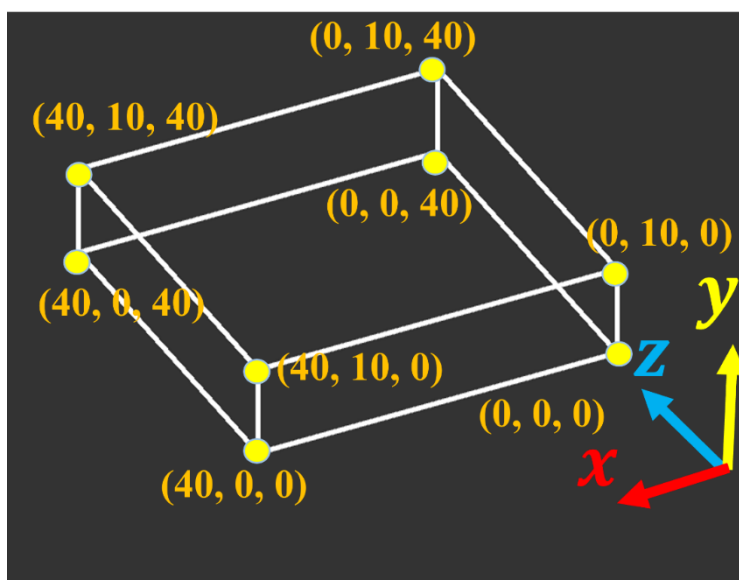


図 2.7 超伝導サイズ拡大したシミュレーションモデル B

### 2.4.1 球状ピン 162 個

図 2.8 に球状ピンを示す。表 2.5 に球状ピン 162 個の詳細条件を示す。

表 2.5 球状ピン 162 個の詳細条件(モデル B)

	ピン位置			ピン半径 $r$	ピン距離 $d$
	$x$	$y$	$z$		
ピン 1~18	4	3,7	4,8,...,36	0.5	4
ピン 19~36	8	3,7	4,8,...,36		
ピン 37~54	12	3,7	4,8,...,36		
ピン 55~72	16	3,7	4,8,...,36		
ピン 73~90	20	3,7	4,8,...,36		
ピン 91~108	24	3,7	4,8,...,36		
ピン 109~126	28	3,7	4,8,...,36		
ピン 127~144	32	3,7	4,8,...,36		
ピン 145~162	36	3,7	4,8,...,36		

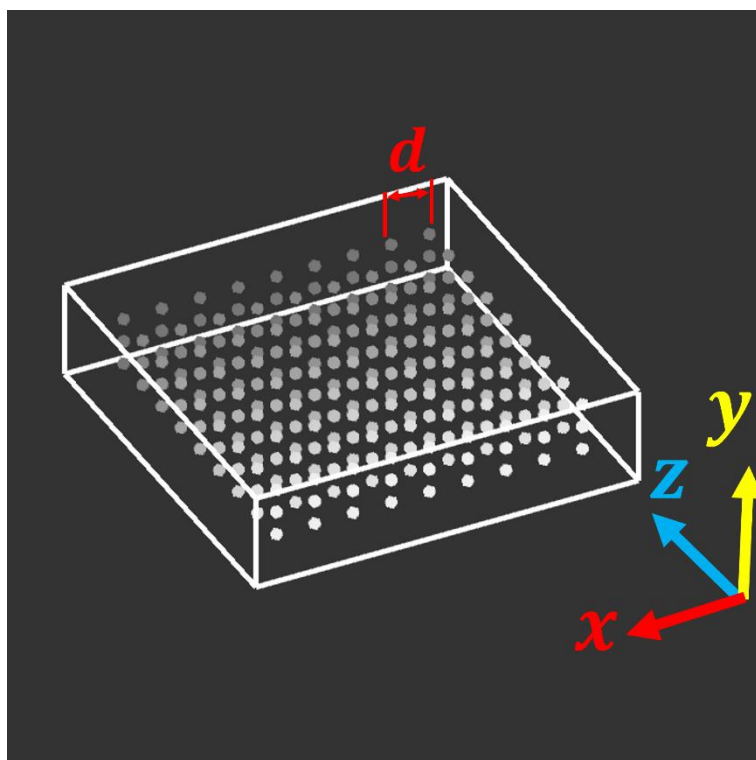


図 2.8 球状ピン 162 個

### 2.4.2 z軸柱状ピン 10本

図 2.9 にz軸柱状ピンを示す。表 2.6 にz軸柱状ピン 10本の詳細条件を示す。

表 2.6 z軸柱状ピン 10本の詳細条件(モデル B)

	ピン位置(x,y)	ピン半径r	ピン距離d
ピン 1	$(\frac{40}{6}, 3)$	1	$\frac{20}{3}$
ピン 2	$(\frac{40}{6}, 7)$		
ピン 3	$(\frac{40 \times 2}{6}, 3)$		
ピン 4	$(\frac{40 \times 2}{6}, 7)$		
ピン 5	$(\frac{40 \times 3}{6}, 3)$		
ピン 6	$(\frac{40 \times 3}{6}, 7)$		
ピン 7	$(\frac{40 \times 4}{6}, 3)$		
ピン 8	$(\frac{40 \times 4}{6}, 7)$		
ピン 9	$(\frac{40 \times 5}{6}, 3)$		
ピン 10	$(\frac{40 \times 5}{6}, 7)$		

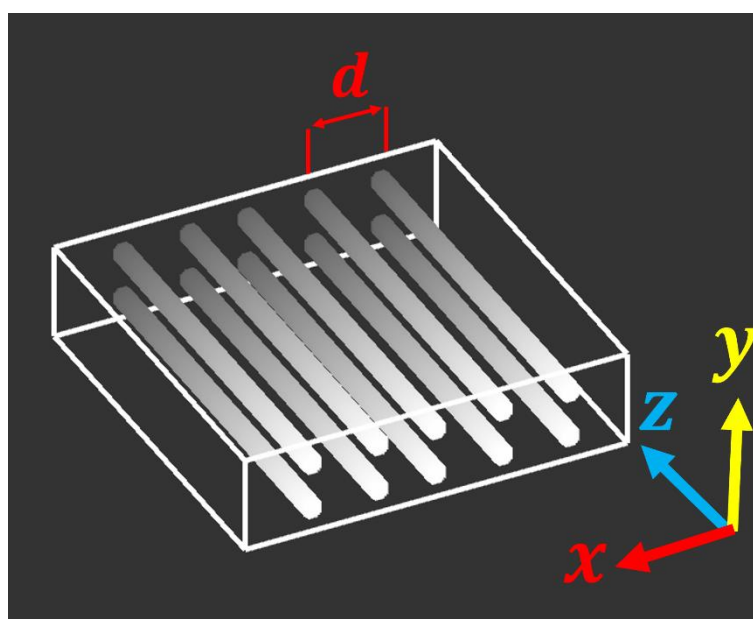


図 2.9 z軸柱状ピン 10本

### 2.4.3 y軸柱状ピン状ピン 81 本

図 2.10 にy軸柱状ピンを示す。表 2.7 にy軸柱状ピン 81 本の詳細条件を示す。

表 2.7 y軸柱状ピン 81 本の詳細条件(モデル B)

	ピン位置 $x$	ピン位置 $z$	ピン半径 $r$	ピン距離 $d$
ピン 1~9	4	4,8,..,36	0.5	4
ピン 10~18	8	4,8,..,36		
ピン 19~27	12	4,8,..,36		
ピン 28~36	16	4,8,..,36		
ピン 37~45	20	4,8,..,36		
ピン 46~54	24	4,8,..,36		
ピン 55~63	28	4,8,..,36		
ピン 64~72	32	4,8,..,36		
ピン 73~81	36	4,8,..,36		

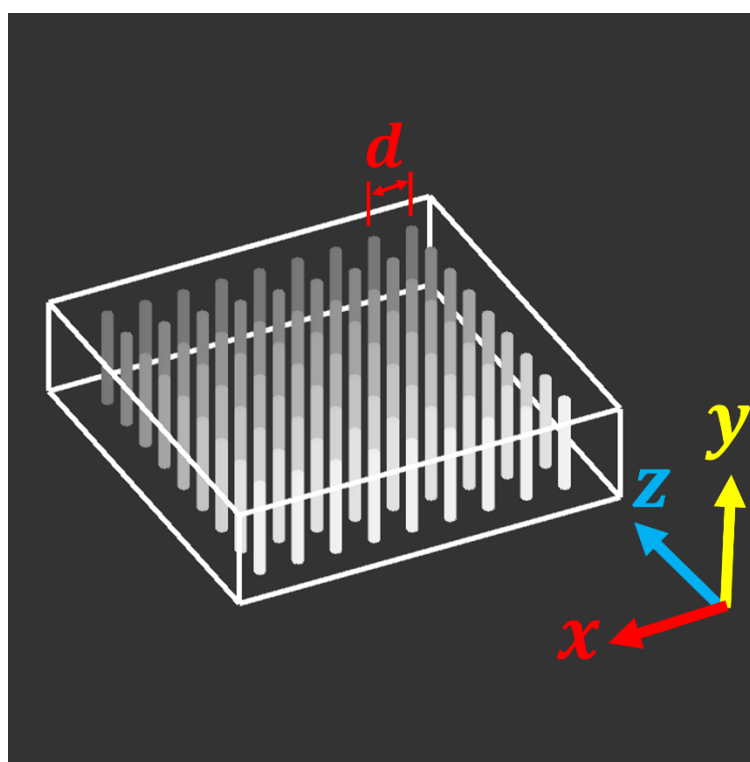


図 2.10 y軸柱状ピン 81 本



#### 2.4.4 面状ピン 3 枚

図 2.11 に面状ピン 3 枚の場合を示す。表 2.8 に面状ピン 3 枚の詳細条件を示す。

表 2.8 面状ピン 3 枚の詳細条件(モデル B)

	ピン位置 $x$	ピンの厚さ
ピン 1	10	2
ピン 2	20	
ピン 3	30	

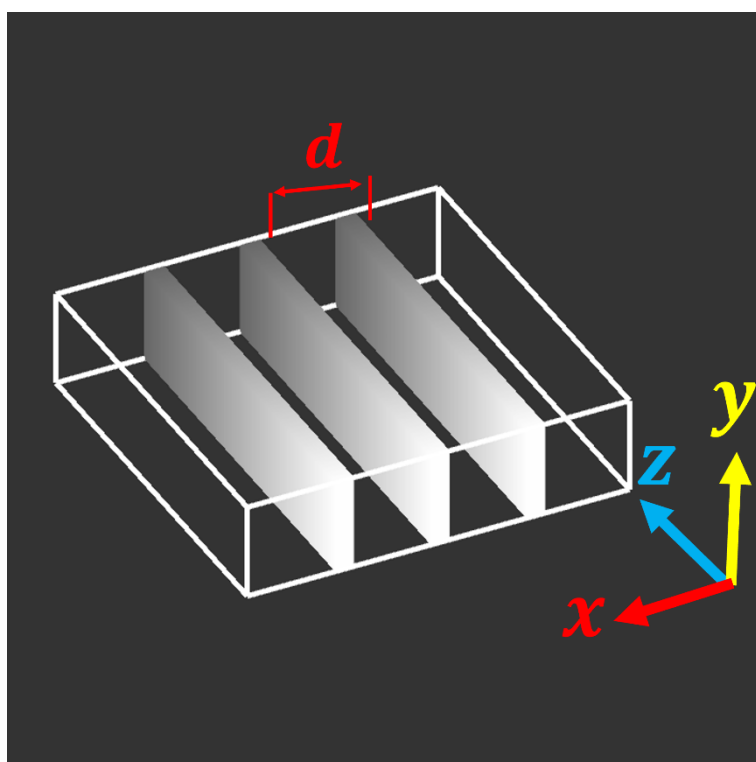


図 2.11 面状ピン 3 枚

## 第3章 計算結果及び考察

### 3.1 シミュレーションモデル $A(x, y, z) = (10, 10, 10)$

#### 3.1.1 ピンなしの超伝導体の $J_c$ - $B$ 特性

図 3.1 に、ピンなしの超伝導体における $J_c$ - $B$ 特性を示す。磁界角度 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$ で計算を行った。異方性パラメータ $\gamma_z$ は1である。

様々な磁界角度において $J_c$ は、 $B$ が大きくなるにつれて減少していく。しかし $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ と $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の $J_c$ では大きな差があり、 $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ において、一番高い $J_c$ を示している。これは超伝導体と真空の境界面による面ピン影響が原因である。 $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ において、面ピン影響が弱く、 $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ において、磁束線は境界面と平行となり、面ピン影響が強く、高い $J_c$ を示している。

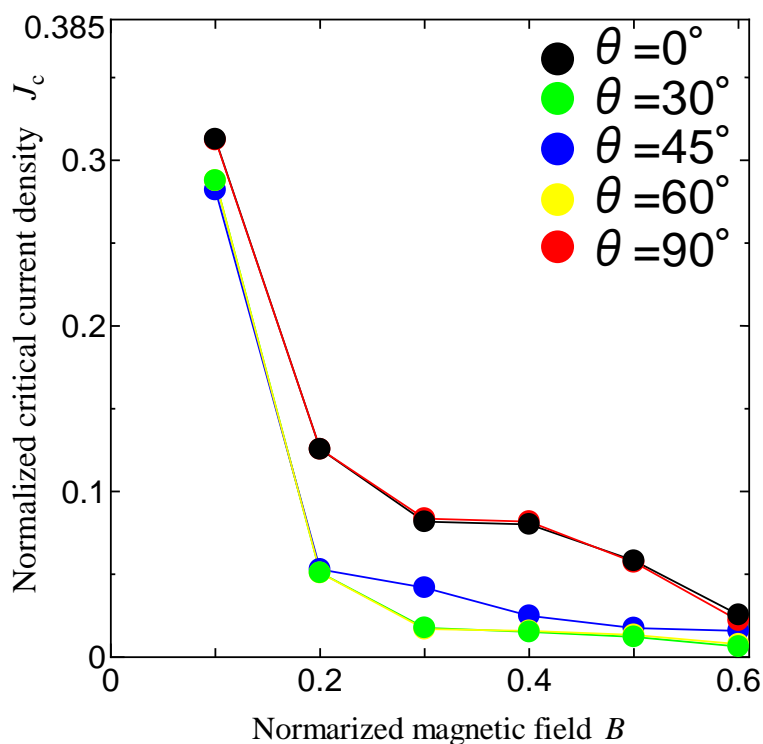


図 3.1 ピンなしの超伝導体における $J_c$ - $B$ 特性

### 3.1.2 球状ピンの $J_c$ - $B$ 特性

図 3.2 に、球状ピン 8 個における $J_c$ - $B$ 特性を示す。磁界角度 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$ で計算を行った。異方性パラメータ $\gamma_z$ は1である。

ピンなしの超伝導体における $J_c$ - $B$ 特性と同じ、様々な磁界角度において $J_c$ は、 $B$ が大きくなるにつれて減少していく。また、 $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ と $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の $J_c$ では大きな差がある。これは超伝導体と真空の境界面よる面ピン影響が原因であることが分かる。

また、低磁場 $B = 0.1$ において、ピンなしの超伝導体より低い $J_c$ を示している。これはピンの体積の影響と考えられる。

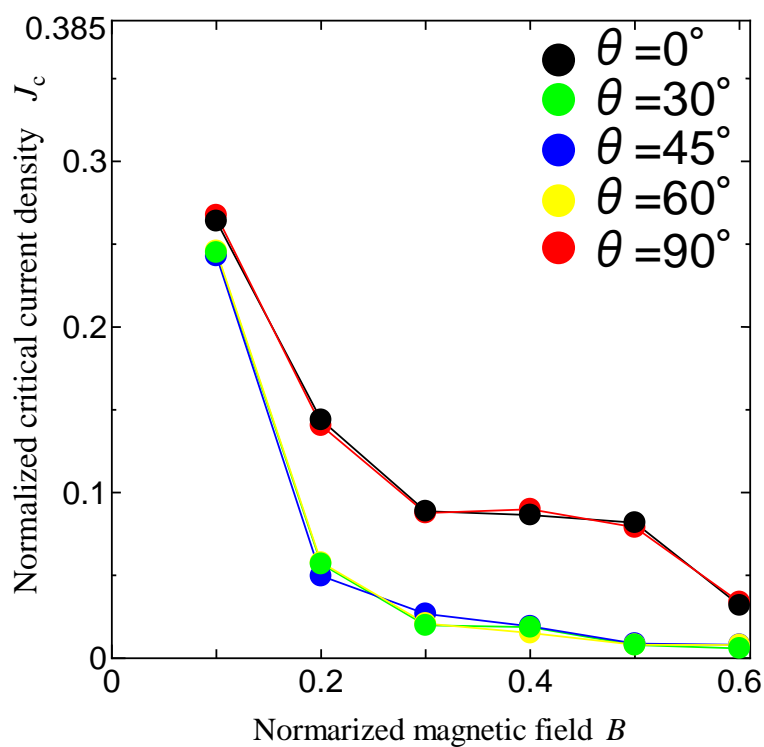


図 3.2 球状ピンにおける $J_c$ - $B$ 特性

### 3.1.3 z軸柱状ピンの $J_c$ - $B$ 特性

図 3.3 に、z軸柱状 4 本における $J_c$ - $B$ 特性を示す。磁界角度 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$ で計算を行った。異方性パラメータ $\gamma_z$ は1である。

$J_c$ は、 $B$ が大きくなるにつれて減少していくが、 $\theta = 0^\circ$ 、 $B = 0.4$ でピークが出現している。これはピーク効果が原因である。ピーク効果と磁束線格子間隔 $a_f$ とピンの間隔 $d$ が一致する磁場において臨界電流密度 $J_c$ が極大となるものである。磁束線格子間隔 $a_f$ は、

$$a_f = \left( \frac{2\phi_0}{\sqrt{3}B} \right)^{\frac{1}{2}} \propto \frac{1}{\sqrt{B}} \quad (3.1)$$

を用いて計算すると $B = 0.4$ では $a_f \cong 3.9$ となり、ピン間隔 $d = 4.0$ とおおよそ一致していることが分かる。

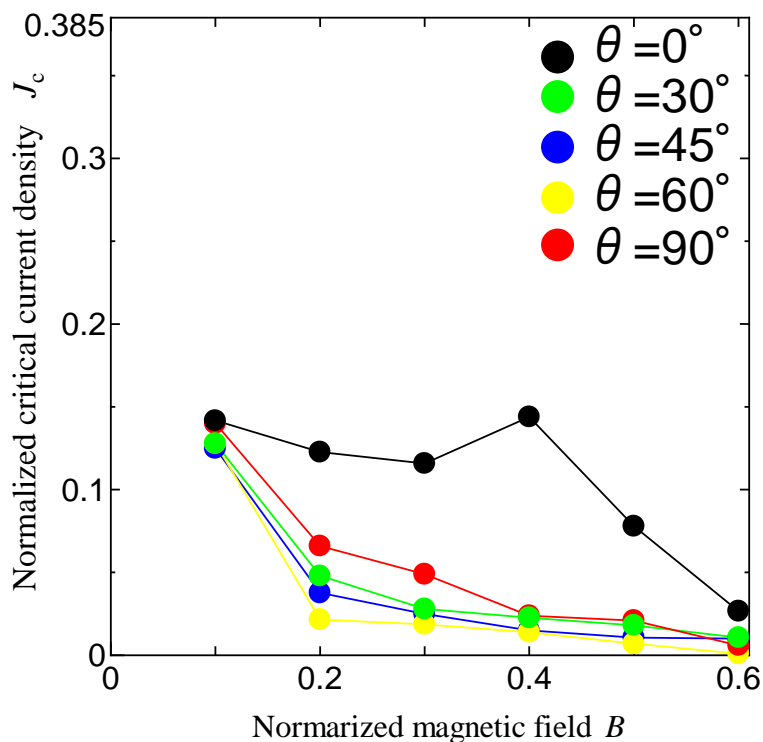


図 3.3 z軸柱状ピンにおける $J_c$ - $B$ 特性

### 3.1.4 $y$ 軸柱状ピンの $J_c$ - $B$ 特性

図 3.4 に、 $y$ 軸柱状 4 本における $J_c$ - $B$ 特性を示す。磁界角度 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$ で計算を行った。異方性パラメータ $\gamma_z$ は1である。

$y$ 軸柱状 4 本における $J_c$ - $B$ 特性は、球状ピンやピンなしにおける $J_c$ - $B$ 特性と似ている。超電導体と真空の境界面による面ピン影響で、 $J_c$ は、 $B$ が大きくなるにつれて減少し、 $\theta = 0^\circ, 90^\circ$ と $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ の $J_c$ では大きな差がある。

$B = 0.1$ において、球状ピンやピンなしの超伝導体より低い $J_c$ を示し、超伝導部分の体積もまた、一番小さいことが分かる。これにより、低磁場では、ピンの影響が少なく、超伝導体の体積が $J_c$ に影響する主要な原因となる。

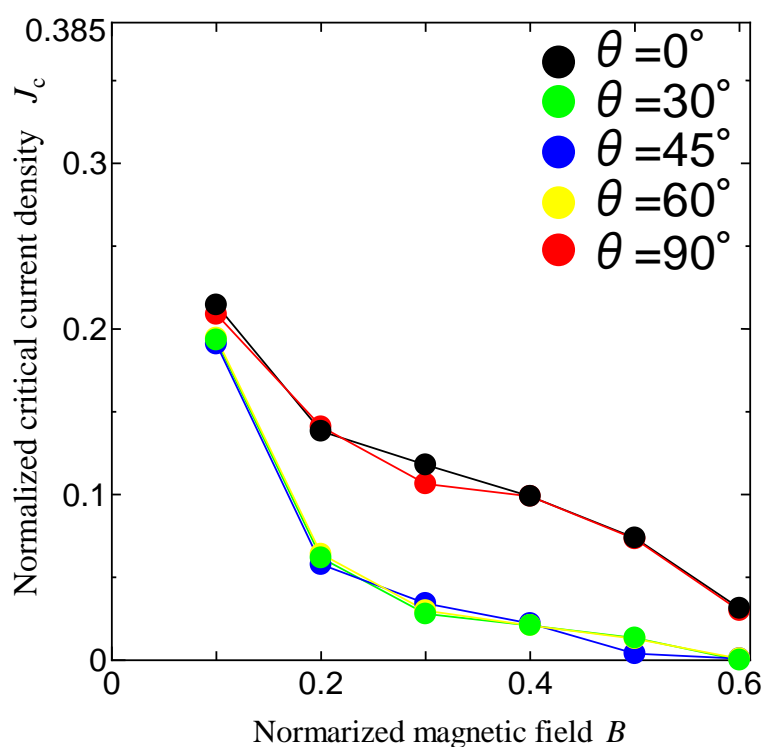


図 3.4  $y$ 軸柱状ピンにおける $J_c$ - $B$ 特性

### 3.1.5 面状ピンの $J_c$ - $B$ 特性

図 3.4 に面状ピン 3 枚における $J_c$ - $B$ 特性を示す。磁界角度 $\theta = 0^\circ, 30^\circ, \dots, 90^\circ$ で計算を行った。異方性パラメータ $\gamma_z$ は1である。

$B = 0.1, 0.2, 0.3$ において、 $J_c$ は $\theta$ が増加するにつれて減少していく、これは鎖交体積の影響である。鎖交体積とは、磁束線とピンの交わる部分の体積で、 $\theta$ が大きくなるほどピンと磁束線の交わる体積が減る。また、(3.2)で示しているように、ピン力と磁束線の鎖交体積に比例する。

$$f_p = \frac{U_0}{\xi} = \frac{1}{2\xi} \times V \times \frac{1}{2} \mu_0 H_c^2 \quad (3.2)$$

ピン力が減り、ピン止め効果が弱くなるので $J_c$ は減少する。

低磁場 $B = 0.4, 0.5$ において、 $\theta = 0^\circ$ は $\theta = 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ より高い $J_c$ を示している。これもまた超電導体と真空の境界面よる面ピンの影響である。

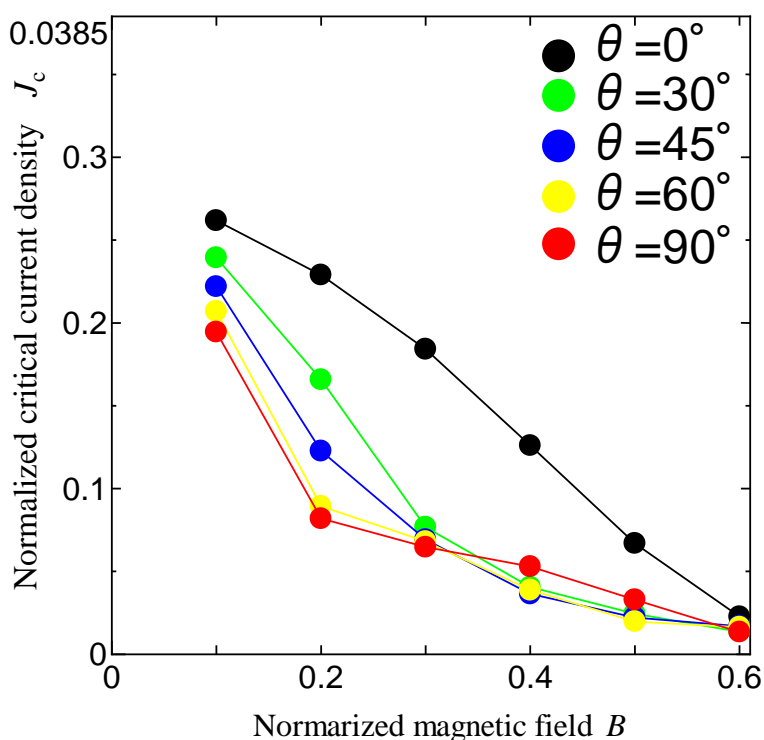


図 3.5 面状ピンにおける $J_c$ - $B$ 特性

### 3.1.6 $B = 0.2$ における $J_c$ - $\theta$ 特性

様々なピンの形状に対する  $J_c$  の角度依存性の調査は  $B = 0.2$  で行った。図 3.6 に示すように、面ピンの場合、角度が大きくなるにつれて  $J_c$  が減少、 $\theta$  が  $0^\circ$  から  $70^\circ$  の間、すべてのピンの条件下で最も高い  $J_c$  を示している。球状ピン、 $z$  軸柱状ピン、 $y$  軸柱状ピンおよびピンがない状態の場合、 $\theta = 0^\circ, 90^\circ$  が最も大きな  $J_c$  を示している。これは超伝導体と真空の境界面によるピンの影響と考えられる。 $\theta$  が  $0^\circ$  から  $20^\circ$  および  $60^\circ$  から  $90^\circ$  の間、球状ピンでは一番高い  $J_c$  を示している。これはピンの体積の影響の影響と考えられる。そして  $\theta$  が  $20^\circ$  から  $60^\circ$  の間  $y$  軸柱状では一番高い  $J_c$  を示している。これは磁場が回転すると、超伝導体と真空の境界面によるピンの影響が弱くなり、超伝導体内のピンの影響が強くなることの原因である。

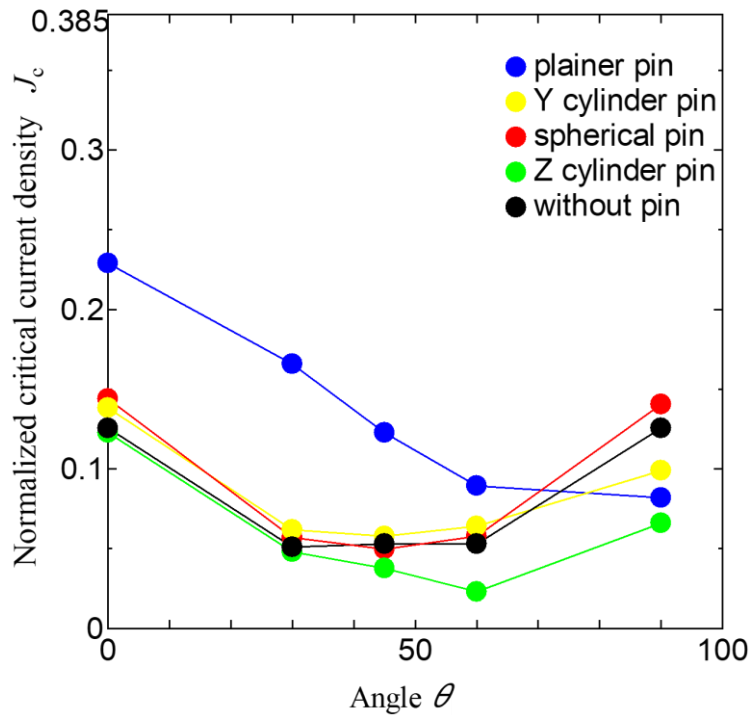


図 3.6 様々なピンが  $B = 0.2$  の場合における  $J_c$ - $\theta$  特性

## 3.2 シミュレーションモデル $B(x, y, z) = (40, 10, 40)$

### 3.2.1 シミュレーションモデル A とシミュレーションモデル B における $J_c$ - $B$ 特性

図 3.7 に示すように、ピンなしのシミュレーションモデル  $A(x, y, z) = (10, 10, 10)$  とピンなしのシミュレーションモデル  $B(x, y, z) = (40, 10, 40)$  における  $J_c$ - $B$  特性を示す。予測では超伝導体内のピンがないと、 $J_c$  は 0 になるはず。しかし、両方のシミュレーションモデルはある程度  $J_c$  が現れる。シミュレーションモデル A では  $B = 0.76$  の時、 $J_c$  がほぼ 0 になる。シミュレーションモデル B では  $B = 0.16$  の時、 $J_c$  がほぼ 0 になる。

つまりシミュレーションモデル A の場合、 $B$  が 0.76 より大きくなると境界面によるピンの影響がないと考えられる。一方シミュレーションモデル B の場合、 $B$  が 0.16 より大きくなると境界面によるピンの影響がないと考えられる。

これによって空間を大きくすることが超伝導-真空境界面の影響を減少することが証明される。

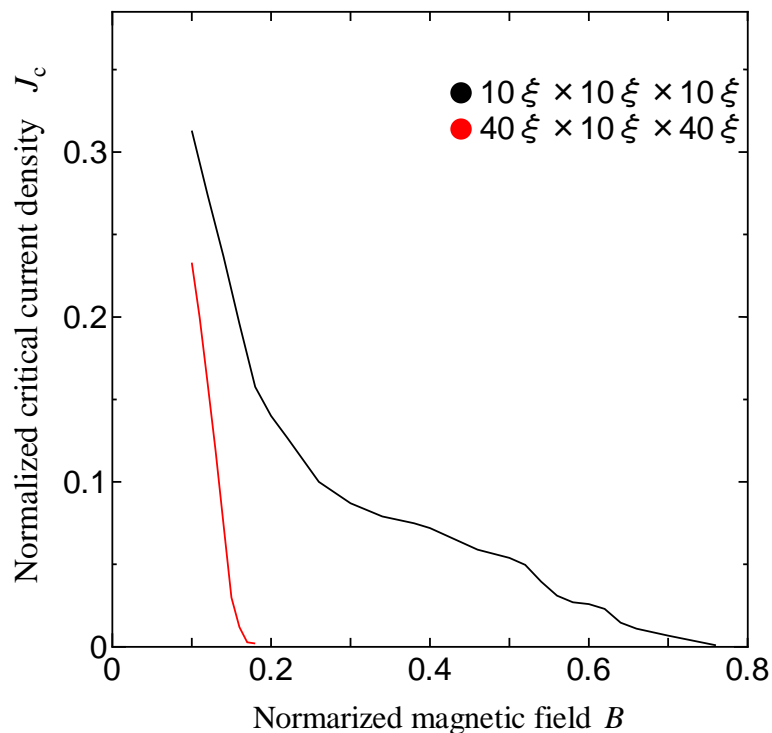


図 3.7 シミュレーションモデル A とシミュレーションモデル B における  $J_c$ - $B$  特性



### 3.2.2 異方性パラメータ $\gamma_z = 1$ の場合における $J_c$ - $B$ 特性

様々なピンの超伝導における $J_c$ - $B$ 特性の調査を行った。図 3.8 に異方性がない場合の面状ピン,球状ピン, $z$ 軸柱状ピン, $y$ 軸柱状ピンおよびピンなしの超伝導における $J_c$ - $B$ 特性を示す。面状ピンが最も高い $J_c$ を示している。球状ピン, $y$ 軸柱状ピンおよびピンがない場合、 $B$ が大きくなるにつれて $J_c$ は減少し、 $B = 0.16$ の時、 $J_c$ はほぼ 0 になる。これが、超伝導体と真空の境界面によるピンの影響と考えられる。つまり $B$ が 0.16 より大きくなると、境界面によるピンの影響はないと考えられる。

また、高磁場 $B = 0.23$ - $0.3$ では、面状ピンと $z$ 軸柱状ピンの $J_c$ 差は、 $B$ が増加するにつれて減少する。特に $B = 0.3$ では、面状ピンと $z$ 軸柱状ピンがほぼ同じ $J_c$ を示す。これは、磁束線の出現本数が原因である。低磁場において出現する磁束線が少ない $z$ 軸柱状の場合、ピンと鎖交せず磁束線すり抜ける可能性がある。面状ピンの場合、磁束線は必ずピンと必ず鎖交する。一方、高磁場において出現する磁束線が多い $z$ 軸柱状ピンは、磁束線がすり抜ける確率が低くピン留めされやすい。

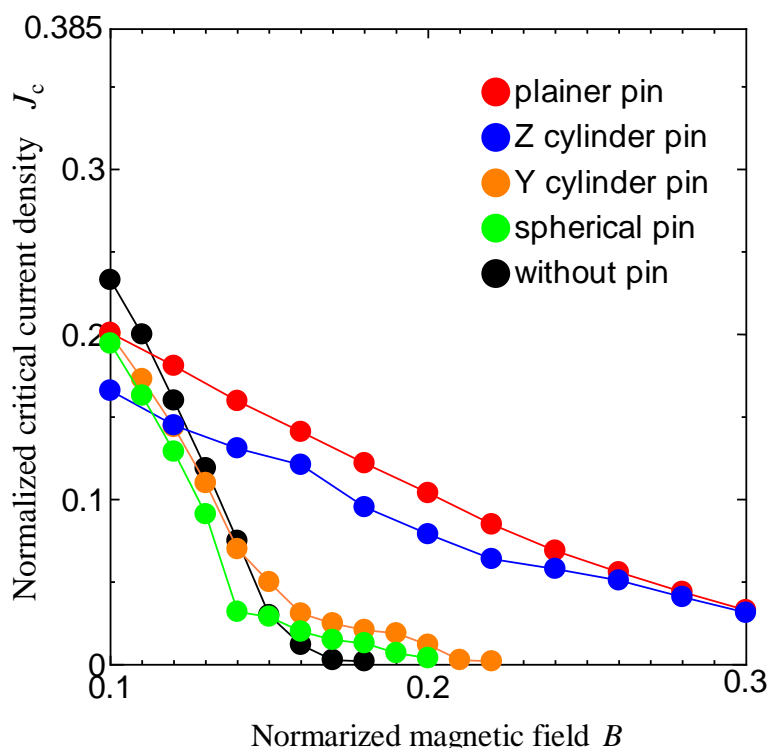


図 3.8 様々なピンの形状における $J_c$ - $B$ 特性 ( $\gamma_z = 1$ )

### 3.2.3 異方性パラメータ $\gamma_z = 512$ の場合における $J_c$ - $B$ 特性

図 3.9 に様々なピンの形状における $J_c$ - $B$ 特性を示す。球状ピンと $y$ 軸柱状ピンは、ピンがないときの超伝導と同じ $J_c$ - $B$ 特性を示している。 $z$ 軸柱状ピンと面状ピンにおける $J_c$ - $B$ 特性は、異方性がない場合とほぼ変わらない。つまり、 $z$ 軸柱状ピンと面状ピンが上手く異方性を耐えることができ、球状ピンと $y$ 軸柱状ピンが上手く異方性を耐えることができない。これは、 $z$ 軸方向に連続にピンを入れることが重要である。異方性の超伝導体では、 $c$ 軸関連な磁束線が超伝導体内にバラバラで入る。 $z$ 軸方向に繋がっていないピンを入れると、磁束線が簡単にすり抜け、ピン留めされにくい。特に本研究では異方性 $\gamma_z = 512$ で計算する。この値は非常に高く、ピン留めされる磁束線がほとんどない。

このことから、 $z$ 軸方向に繋がったピンを入れることで異方性の影響を打ち消すことが分かる。なお本研究では、 $z$ 軸が $c$ 軸に対応している。

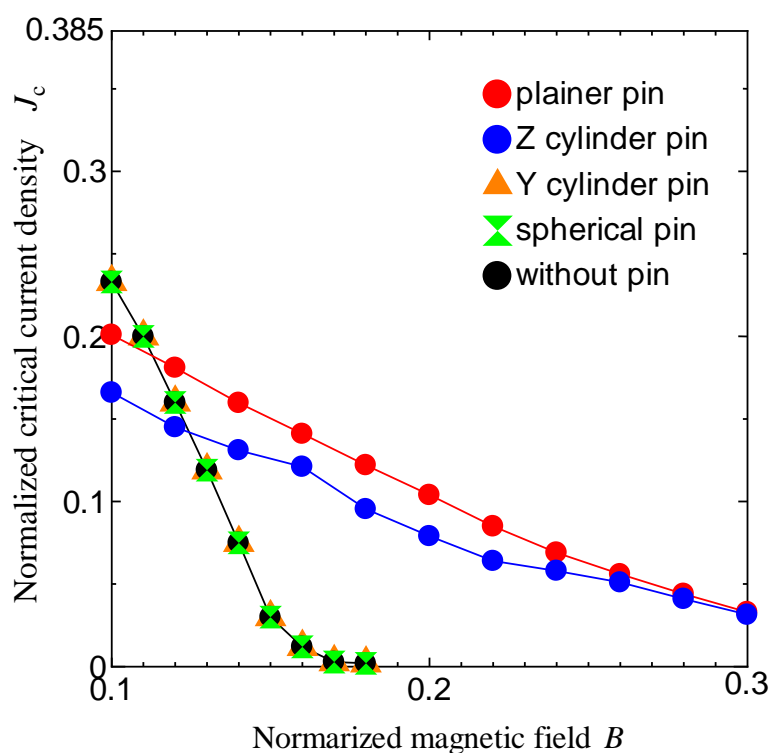


図 3.9 様々なピンの形状における $J_c$ - $B$ 特性( $\gamma_z = 512$ )

### 3.2.4 異方性パラメータ $\gamma_z = 512$ の場合z軸柱状ピンにおける $J_c$ - $\theta$ 特性

3.2.3 節に示すように、z軸柱状ピンと面状ピンが上手く異方性を耐えることができることが分かる。ここで、図 3.10 にz軸柱状ピンとピンなしの超伝導における $J_c$ - $\theta$ 特性を示す。異方性 $\gamma_z = 512$ において計算を行った。ここでの $\gamma_z$ を極大の値まで計算する。また、磁界方向 $\theta = 0^\circ, 15^\circ, \dots, 90^\circ$ で計算を行った。両方とも $\theta$ の増加につれて $J_c$ は増加し、 $\theta = 90^\circ$ の時、最大の $J_c$ を示す。

しかし、超伝導体の応用にあたり、様々な磁界方向において一定の $J_c$ が保たれることが望ましい。その中で、 $\theta = 0^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ の $J_c$ の差、ピンなしの場合、最大は 0.383、最小は 0.372 がある。一方、z軸柱状ピンの場合、最大は 0.152、最小は 0.122 しかない。つまり、z軸方向に柱状ピンを入れることで、様々な磁界方向に高い $J_c$ を得ることができる。

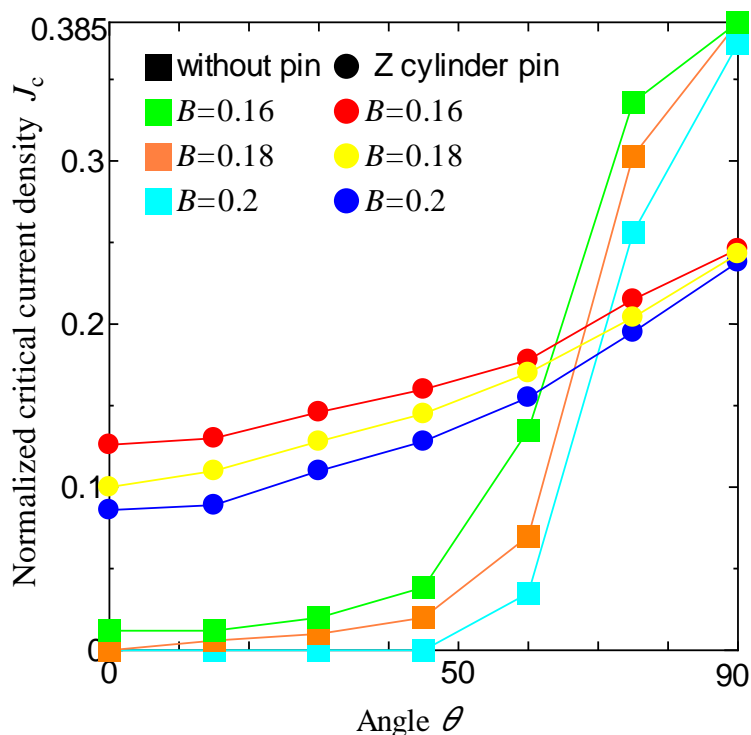


図 3.10 z軸柱状ピンにおける $J_c$ - $\theta$ 特性 ( $\gamma_z = 512$ )

### 3.2.5 異方性パラメータ $\gamma_z = 512$ の場合面状ピンにおける $J_c$ - $\theta$ 特性

図 3.11 に面状ピンとピンなしの超伝導における $J_c$ - $\theta$ 特性を示す。異方性 $\gamma_z = 512$ において計算を行った。 $z$ 軸柱状ピンにおける $J_c$ - $\theta$ 特性と同じように、 $\theta = 0^\circ$ の時が一番低く、 $\theta = 90^\circ$ の時が一番高い $J_c$ を示す。しかし、 $\theta = 0^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ の $J_c$ の差、 $z$ 軸柱状ピンの場合、最大は0.152、最小は0.122となる。一方、面状ピン最大は0.106、最小は0.082しかない。

また、3.2.3節に示すように、面状ピンは $z$ 軸柱状ピンより高い $J_c$ を示す。つまり、面ピンの方が強いことが分かる。このことから、 $z$ 軸方向により強いピンを入れることが $\theta = 0^\circ$ と $\theta = 90^\circ$ の $J_c$ の差を減らすことができる。つまり、より強いピンが様々な磁界方向において一定の $J_c$ を保つことに優れている。

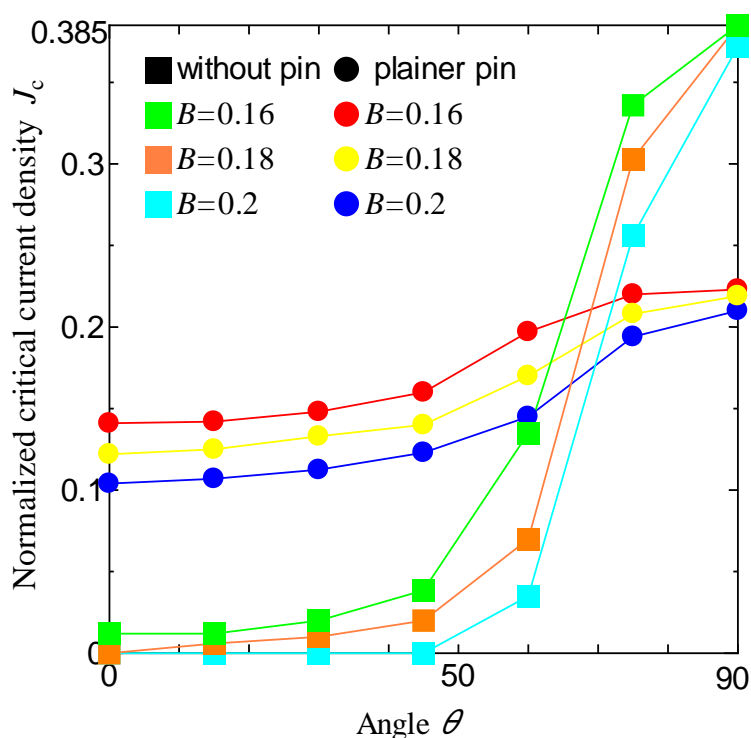


図 3.11 面状ピンにおける $J_c$ - $\theta$ 特性 ( $\gamma_z = 512$ )

## 第4章 総括

本研究では 3 次元の TDGL 方程式を数値的に解くことで、様々な磁界下での超伝導体内の量子化磁束線の動きを可視化しこれを用いて、様々な磁界方向における異方性を考慮した超伝導体の 3 次元量子化磁束構造の研究を行った。異方性を持つ超伝導体の  $J_c$  は、磁界の印加方向に大きく異なる。磁界が  $c$  軸方向と平行で印加する時  $J_c$  は低く、 $ab$  面と平行で印加する時  $J_c$  が大きくなるという問題点がある。解決方法として、ピンの挿入によって、様々な磁界方向において一定の  $J_c$  が保たれることが考えられる。そこで、様々な磁界方向で様々な形状のピンにおける  $J_c$ - $\theta$  特性について詳しく調査する。

まずは、超伝導体モデル  $A(x, y, z) = (10, 10, 10)$  の場合で様々な磁界方向で様々なピンにおける  $J_c$ - $B$  特性を調査した。しかし、空間が小さいことが原因で、超伝導-真空境界面による影響を大きく受けて、 $\theta = 0^\circ, 90^\circ$  の時  $J_c$  は異様に高くなった。そこで、超伝導体の大きさを量子化磁束の様々な運動方向に拡大したモデル  $B(x, y, z) = (40, 10, 40)$  を導入し、 $z$  軸方向(結晶構造上の  $c$  軸)の異方性パラメータを  $\gamma_z$  として、 $\gamma_z = 1, 512$  と変更し計算を行った。ピンの形状は、面状ピン 3 枚、球状ピン 162 個、 $z$  軸柱状ピン 10 本、 $y$  軸柱状ピン 81 本を用意した。その中で、 $z$  軸方向で繋がっている  $z$  軸柱状ピンと面状ピンが上手く異方性を耐えることができ、 $z$  軸方向にバラバラで挿入した球状ピンと  $y$  軸柱状ピンが上手く異方性を耐えることができない。

また、モデル  $B(x, y, z) = (40, 10, 40)$  を異方性パラメータ  $\gamma_z = 512$ 、磁界方向  $\theta = 0^\circ, 15^\circ, \dots, 90^\circ$  で計算を行った。超伝導体の応用にあたり、様々な磁界方向において一定の  $J_c$  が保たれることが望ましい。その中で、 $\theta = 0^\circ$  と  $\theta = 90^\circ$  の  $J_c$  の差は、ピンなしの場合、最大は 0.383、最小は 0.372 がある。 $z$  軸柱状ピンの場合、最大は 0.152、最小は 0.122 がある。一方、面状ピン最大は 0.106、最小は 0.082 しかない。つまり、 $z$  軸方向に柱状や面状ピンを入れることで、様々な磁界方向に高い  $J_c$  を得ることができる。また、 $z$  軸方向により強い面状ピンを入れることが  $\theta = 0^\circ$  と  $\theta = 90^\circ$  の  $J_c$  の差を減らせることができる。つまり、より強いピンが様々な磁界方向において一定の  $J_c$  を保たれることに優れている。

ピンの形状を様々な密度、数、配列で調査した、しかし、一番効果がある状態を探すのが非常に困難である、磁場  $B$  の大きさによって、一番効果があるピンの状態が変わる。また、シミュレーションモデルのサイズを更に拡大することが望ましい。しかし、計算時間がかかるので、そのため、より高度なアルゴリズムやプログラミングの更新でシミュレータを高速化させる必要がある。

# 参考文献

- [1] H. K. Onnes (1911) Comm. Leiden.120
- [2] W. Meissner, Ochsenfeld (1933) Naturwiss. 21:787
- [3] F. London and H. London (1935) Proc.R.Soc.London.A149:71
- [4] V. L. Ginzburg, L. D. Landau, and Zh. Eksp (1950) Teor. Fiz. 20:1064
- [5] J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer (1957) Physical Review. 108: 1175-1204
- [6] J. G. Bednorz, K. A. Mueller (1986) Z. Phys B. 64: 189
- [7] D Larbalestier, A Gurevich, DM Feldmann, A Polyanskii (2001) Nature.414:368-377
- [8] J Clarke, et al. DC Larbalestier (2006) Nature Physics. 2:794-796
- [9] 岸尾光二 (1995) 異方性と磁束ピンニングの化学的制御.まてりあ. 34:12
- [10]Palau A, Durrell J H, Macmanus-Driscoll J L, Harrington S, Puig T, Sandiumenge F, Obradors X, Blamire M G.Phys (2006) Rev. Lett. 97: 257002
- [11]Sueyoshi, T (2021) Quantum Beam Sci.5:16.
- [12]松下照男 (1994) 磁束ピンニングと電磁現象. 産業図書
- [13]D. Y. Vodolazov (2013) Phys. Rev. B. 88:014525
- [14]J. F. Blackburn (2000) Philosophical Magazine B. 80:1455
- [15]松下照男, 井口家成(1991) 超電導応用. 表面科学. 12:9
- [16]T. Matsushita. J (1982) Phys. Soc. Jpn. 51: 9
- [17]D. A. Jacobson (1965) Phys. Rev. 138:4A
- [18]松下照男(2008) 超伝導体における磁束ピンニング[3]. 低温工学. 43:11
- [19]I. A. Sadovskyy, A. E. Koshelev, C. L. Phillips, D. A. Karpeyev, and A. Glatz (2015) Journal of Computational Physics. 294:639
- [20] 米塚里奈 (2020) 時間依存ギンツブルグ-ランダウ方程式による異方性を考慮した超伝導体内の磁束運動の研究.
- [21]田中敏幸 (2006) 数値計算法基礎. コロナ社. 東京
- [22]高橋亮一, 棚町芳弘 (1991) 計算力学と CAO シリーズ差分法. 培風館. 東京
- [23]新濃清志, 船田哲男 (1991) 数値解析の基礎-理論と PAD・PASCAL・C. 培風館. 東京
- [24]Knuth Donald (1997) Sorting and Searching. The Art of Computer Programming. 3rd ed. Addison-Wesley. 409

# 謝辞

最初に、熱心にご指導いただきました九州工業大学 大学院情報工学研究院 電子情報工学研究系 小田部 荘司 教授に深く御礼申し上げます。コロナ禍にもかかわらず充実した2年間を送ることができましたことは先生のおかげです。そして、研究活動だけでなく、学生生活や就職活動に関しても多くの助言をいただけたこと、深く感謝いたします。

有明工業高等専門学校 松野 哲也 先生と産業技術総合研究所の馬渡康徳先生に心より感謝申し上げます。ご指導をいただきました。

大野香助教にお礼を申し上げます。論文のご修正いただき、深く感謝いたします。

松下照男名誉教授にもお礼を申し上げます。貴重な資料等を見せていただいたこと、深く御礼申し上げます。

最後に、お世話になった小田部研究室の先輩や同級生、後輩の皆様、長い間お世話になりました。皆様のおかげで充実した研究生生活を送ることができました厚く御礼申し上げ、感謝いたします。

# 研究業績

## 発表

1. 閻 洪, 川畑 唯一, 米塚 里奈, 小田部 荘司, 馬渡 康德, 松野 哲也「様々な磁界方向における超電導線材中の 3 次元量子磁束構造のシミュレーション」第 73 回 電気・情報関係学会九州支部連合大会, オンライン, 令和 2 年 9 月 26 日
2. 閻 洪, 川畑 唯一, 米塚 里奈, 小田部 荘司, 馬渡 康德, 松野 哲也「様々な磁界方向における超電導線材中の 3 次元量子磁束構造のシミュレーション」九州・西日本支部 2020 年度若手セミナー・支部研究成果発表会, オンライン, 令和 2 年 10 月 31 日
3. 閻 洪, 川畑 唯一, 米塚 里奈, 小田部 荘司, 馬渡 康德, 松野 哲也「様々な磁界方向における超電導線材中の 3 次元量子磁束構造のシミュレーション」第 100 回 低温工学・超電導学会, 京都大学吉田キャンパス, 令和 2 年 12 月 8 日
4. 閻 洪, 川畑 唯一, 小田部 荘司, 馬渡 康德, 松野 哲也「異方性を考慮した 3 次元量子磁束構造のシミュレーション」第 68 回 応用物理学会春季学術講演会, オンライン, 令和 3 年 3 月 16 日
5. Hong Yan, Yuito Kawabata, Rina Yonezuka, Edmund Soji Otabe, Yasunori Mawatari, Tetsuya Matsuno “TDGL Simulation on Angular Dependence of Critical Current Density in Superconductors with Columnar Defects” 33 st INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON SUPERCONDUCTIVITY, AIST Tsukuba and online, December 3, 2020