2023年度

修士論文

接合形状及び臨界電流密度分布の違いによる
ジョセフソン接合の斜め磁場中の
直流臨界電流の磁気干渉

情報創成工学専攻

小田部研究室

226E0327

原岡壮馬

内容

第 1 章　序章

1.1 超伝導の基礎

超伝導体は 1911 年にオランダの Kamerilingh-Onnes によってはじめて水銀で発見された．超伝導体は，電気抵抗が 0 であること，完全反磁性の両方を満たすことが必要である．この性質に起因するのは温度であり，超伝導体と導体の境界になる温度のことを臨界温度という．

また，超伝導体は 2 種類に分けられ，全く磁場を受け入れない Meissner 効果を示す第 1 種超伝導体と，磁場を受け入れて混合状態を示す第 2 種超伝導体があり，産業的応用に用いられるのは第 2 種超伝導体がほとんどである．第 2 種超伝導体を記述する式として，G-L (Ginzburg-Landau) 方程式があり，本論文のトピックである Josephson 効果はこの方程式が基になっている．

超伝導体の産業的応用としては，電力輸送ケーブルや磁気浮上列車，脳磁・心磁測定など多岐にわたっている．本論文では医療機器や極低磁場検出機器への応用が期待される SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) の発展にとって重要な Josephson 接合における直流臨界電流の磁気干渉について記述している．

1.2 Josephson 接合

異なる 2 種類の超伝導体の間に薄い絶縁層 (半導体、導体も可) を挟むことでトンネル効果によって電流が流れる現象を Josephson 効果といい，このとき接合に流れている電流を Josephson 電流という．これは、超伝導体中の電子がコヒーレント (位相が揃った状態) であることから，電位差なしで電流が流れることを 1962 年にイギリスの Cambridge 大学の Josephson 氏が理論的に予想し，翌年には実験でも確かめられている．

Josephson 接合における直流臨界電流の磁場依存性は，接合領域に平行に磁場を印加すると Fraunhofer 回折のような磁気干渉パターンを示す [1), 2)] (図 1.3)．臨界電流 I_c の大きさはゼロ磁場での臨界電流 I_{c0} を用いて，$I_c = I_{c0}|\sin(\pi\Phi/\phi_0)/(\pi\Phi/\phi_0)|$ であらわされる．　この原理は SQUID の応用・開発において重要である [3), 4)]．一方で，垂直磁場や斜め磁場を印加した場合の磁気干渉に関する研究はまだ少ない．ここで斜め磁場とは平行磁場と垂直磁場が合成された磁場のことをさしている．

本稿では，オーバーラップ接合と十字型接合の 2 つの形状について注目している．Rosenstein と Chen は、垂直磁場下のオーバーラップ接合に Fraunhofer pattern があらわれることを明らかにした [5)]．さらに，Monaco らは，オーバーラップ接合では接合の大きさに応じて磁気干渉が異なることを数値解析により示した [6)]．

一方，十字型接合の場合，Miler らは，垂直磁場下では磁気干渉が起こらないことを

報告している[7]．さらに馬渡氏は，2 次元および 3 次元斜め磁場中で接合面内の臨界電流密度が均一に分布している場合の直流臨界電流の磁気干渉について解析的に明らかにした[8]．

さらに，Barone らは，接合面内の臨界電流密度分布の違いによって臨界電流の磁気干渉が異なることを報告している[9]．

ここで，Josephson 接合における臨界電流密度と超電導線材における臨界電流密度は定義が異なることを示しておく．ジョセフソン接合の場合，接合の面積あたりの最大の電流をさしている．一方，超電導線材では，線材の断面積当たりの臨界電流をさしている．

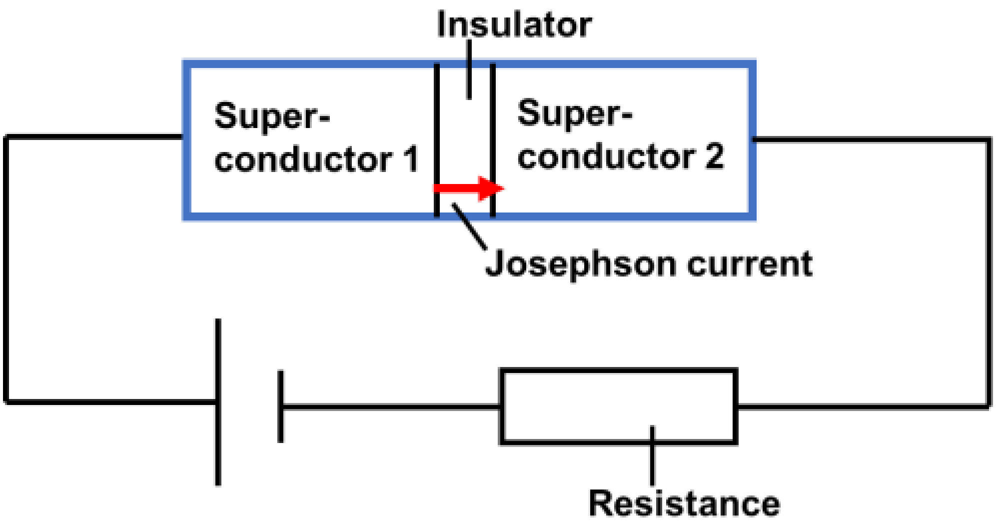


図 1.1 Josephson 接合の回路図．Josephson 電流は，トンネル効果により絶縁層を流れる電流．

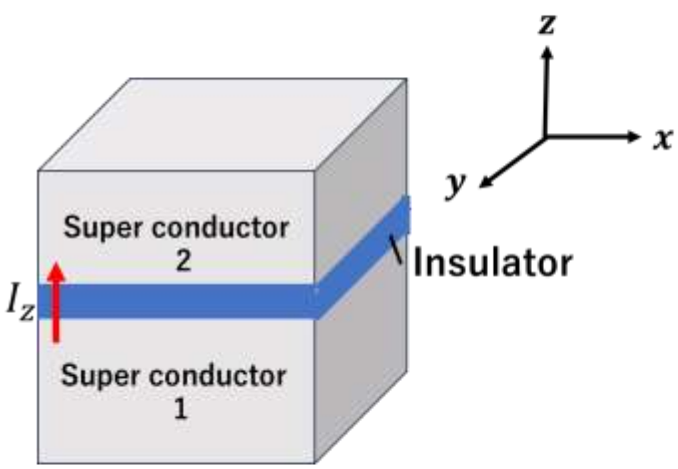


図 1.2 実際の Jpsephson 接合．I_z が Josephson 電流

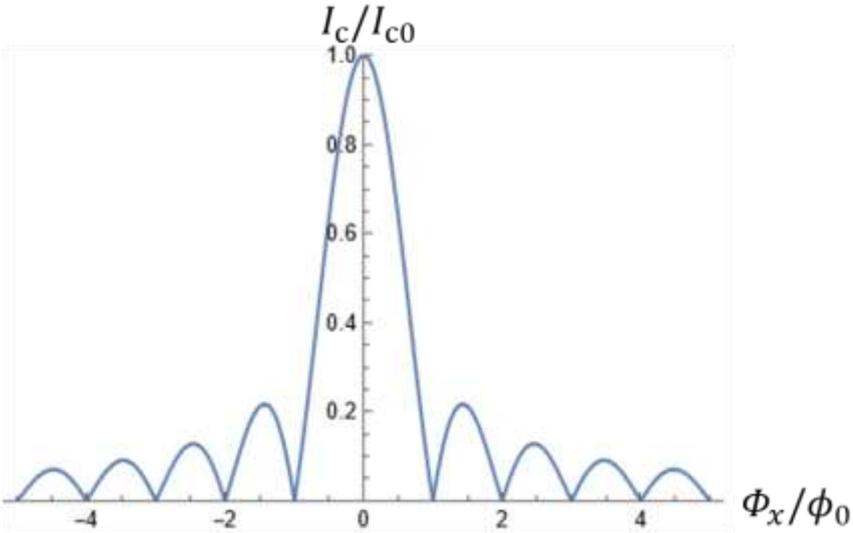


図 1.3 接合面に対して平行な磁場を印加した時の直流臨界電流の磁場依存性．縦軸は直流臨界電流の大きさ，横軸は接合面に平行な磁場.

1.3 SQUID

SQUID (Superconducting Quantum Interference Device) は，非常に小さい磁場を検出することを可能とし，医療機器への応用や資源探査など，幅広い分野での応用が期待されている [3), 10), 11)]．SQUID の基本となる物理現象は磁束の量子化 (Flux Quantization) とトンネル効果 (tunnel effecting) である．磁束の量子化とは，磁束 Φ が超電導体のループの中では磁束の最小単位 $\phi_0(2.07 \times 10^{-15}$ [Wb]) で量子化されることをあらわす [12)].

本研究は，外部磁場に対して臨界電流がどのように変化するかに焦点を当てている．この臨界電流の変化が Josephson 接合の位相差としてあらわれ，位相差の変化が分かれば，磁場の変化も検出することが可能となる．Josephson 接合は磁場に対して非常に敏感であるため，微弱な外部磁場の変化の検出も可能にする．また，Josephson 接合の臨界電流は外部磁場に対して線形であるため，外部磁場の強度を正確に測定することも可能にする.

本研究とは直接関係しないが，SQUID は磁束を電圧に変換することも可能にする．SQUID の電流-電圧 (I-V) 特性は，超電導ループを鎖交する磁束 Φ によって変調される．Φ が磁束量子 ϕ_0 の整数倍 ($n\phi_0$) のときに超伝導電流 (ゼロ電圧電流）が最大となり，Φ が $(n+1/2)\,\phi_0$ の時に最小となる．この変換特性を利用することによって，SQUID を磁気センサとして用いることが可能となり，極めて高感度な磁気センサを実現する.

1.4 研究目的

Josephson 接合は，磁場に対して非常に高感度であることから，SQUID に応用されており，産業として様々な用途がある．大きな特徴としては接合面に対して平行に磁場が印加された際，接合面内を流れる直流臨界電流が Fraunhofer pattern を示すことである．その一方で，垂直及び斜め磁場についての直流臨界電流の磁場依存性についての研究は少ないことが現状にある．これまでの研究で，十字型接合については垂直磁場中で磁気干渉が発生しない一方で，オーバーラップ接合では垂直磁場中でも磁気干渉が発生することが分かっている．また，接合面内の臨界電流密度が不均一に分布している場合，臨界電流密度が均一な場合と異なる磁気干渉が生じることが分かっている．

本研究の目的は，接合形状及び接合面内の臨界電流密度の違いによる斜め磁場中での直流臨界電流の磁場依存性について理論的に明らかにすることである．接合形状は十字型接合とオーバーラップ接合の 2 種類に注目した．昨年度の先行研究では，2 次元斜め磁場中で，臨界電流密度が均一な場合についての直流臨界電流の磁場依存性について理論解析を行った．結果として，十字型接合とオーバーラップ接合で直流臨界電流の磁場依存性は異なることがわかった [13]．また，十字型接合については 3 次元斜め磁場中の磁気干渉についても明らかにされている．ただし，これらの研究では接合面内の臨界電流密度が均一に分布しているという条件で計算を行った．

本稿では，3 次元斜め磁場中で先行研究と同様の研究を行った結果を紹介している．加えて，臨界電流密度が接合面内に不均一に分布している場合を考え，臨界電流密度分布の違いによる直流臨界電流の磁場依存性についても計算を行った．この研究は、1 つの SQUID で複数方向の磁場を高精度に測定可能にすることが期待でき，これにより，医療機器や資源探査といった分野の発展が期待される．

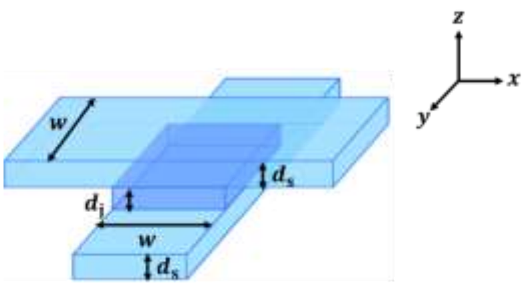
本稿の構成は，第 2 章で，計算で扱った十字型接合とオーバーラップ接合のモデルと Short junction において，ゲージ不変な位相差が磁場によって変調される理由について解説している．第 3 章では，解析モデルを示すと共に，それらのモデルを計算した理由について説明する．また，十字型接合とオーバーラップ接合における臨界電流を求める際の理論式についても解説している．第 4 章では，結果と考察を記述している．結果の説明として，等高線プロットを用いて，臨界電流が 2 次元及び 3 次元斜め磁場中でどのように変化するのかを説明している．考察では，接合面内の電流密度について計算した結果を用いて，磁場によって臨界電流がどのように変調されるのかについて議論している．第 5 章では結論として，本論文の総まとめをしている．

第 2 章 接合形状と Short junction

2.1 十字型接合とオーバーラップ接合

本論文では十字型接合とオーバーラップ接合の直流臨界電流の磁気干渉について解析した結果について説明する．十字型接合及びオーバーラップ接合の形状を図 2.1 に示した．十字型接合は名前の通り上下の超伝導ストリップが十字になるように重ね合わせ，その間に薄い絶縁層を挟んだ構造である．一方，オーバーラップ接合は上下の超伝導ストリップを平行に重ね合わせ，その間に絶縁層を挟んだ構造をしている．なお，本計算では Short junction を考えており，自己磁場及び磁気遮蔽効果は無視できるものとしている．接合のサイズ (Short junction と Long junction) による物理現象の違いについては 2.2 節で述べる．上下の超伝導ストリップの幅は w，ストリップの厚みは d_s，絶縁層の厚さは d_{j} としている．接合のスケールについて，十字型接合では，上部ストリップのスケールは，$-\infty < x < \infty, -w/2 < y < w/2, d_{\mathrm{j}}/2 < z < d_{\mathrm{j}}/2 + d_s$，下部ストリップは，$-w/2 < x < w/2, -\infty < y < \infty, -d_{\mathrm{j}}/2 - d_{\mathrm{s}} < z < -d_{\mathrm{j}}/2$ とした．オーバーラップ接合では，上部ストリップのスケールは，$-w/2 < x < \infty, -w/2 < y < w/2$, $d_{\mathrm{j}}/2 < z < d_{\mathrm{j}}/2 + d_s$，下部ストリップのスケールは，$-\infty < x < w/2, -w/2 < y < w/2, -d_{\mathrm{j}}/2 - d_{\mathrm{s}} < z < -d_{\mathrm{j}}/2$ とした．接合面の形状は共に$w \times w$ の正方形とした．

(a) 十字型接合



(b) オーバーラップ接合

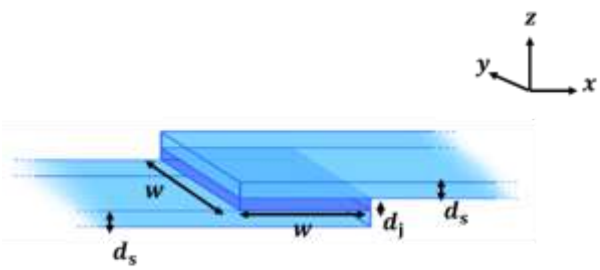


図 2.1 ジョセフソン接合の形状 (a) 十字接合，(b) オーバーラップ接合．(a) 上部ストリップのスケールは，$\boldsymbol{-\infty < x < \infty, -w/2 < y < w/2, d_{\mathrm{j}}/2 < z < d_{\mathrm{j}}/2 + d_s}$，下部ストリップは，$\boldsymbol{-w/2 < x < w/2, -\infty < y < \infty, -d_{\mathrm{j}}/2 - d_s < z < d_{\mathrm{j}}/2 + d_s}$．(b) 上部ストリップのスケールは，$\boldsymbol{-w/2 < x < \infty, -w/2 < y < w/2, -d_{\mathrm{j}}/2 - d_s < z < d_{\mathrm{j}}/2 + d_s}$，下部ストリップのスケールは，$\boldsymbol{-\infty < x < w/2, -w/2 < y < w/2, -d_{\mathrm{j}}/2 - d_s < z < d_{\mathrm{j}}/2 + d_s}$．接合面の形状は共に $\boldsymbol{w \times w}$ 絶縁層の厚さは共に$\boldsymbol{d_{\mathrm{j}}}$.

2.2 Short junction と Long junction

本計算では Short junction を扱った．ここでは Short junction と Long junction の違いについて簡単に説明する．

Short junction ではジョセフソン接合を流れる電流により発生する磁場 (自己磁場) の影響は接合に印加される外部磁場に比べて十分に小さいので，計算では無視している．また，接合の空間的な広がりは London の磁場侵入長 (London penetration depth) λ_L に比べて短いため，磁気遮蔽効果も無視することが可能となる．これにより接合面内の電流密度は均一とみなすことができる．Short junction における磁場侵入長 は Josephson penetration depth λ_J と定義される．

一方で Long junction では，自己磁場の影響は無視できず，接合の空間的な広がりは λ_L よりも大きい．

2.3 Short junction に磁場が印加された時の量子効果

ここで、Short junction において磁場が印加された時について考える．図 2.2 は，2 つのストリップの間に厚さ d の絶縁層を挟んだサンドウィッチ構造である．接合面積は $L \times W$ で yz 平面に広がっているものとし，電流は x 方向に流れているとする．ここでは，$L, W \gg d$ としている．それぞれの超電導ストリップの厚さをt_1, t_2 とし，それぞれのストリップの材料の厚さは，London の磁場侵入長さ $\lambda_\mathrm{L1}, \lambda_\mathrm{L2}$ よりも厚いものとする．ここでは，y 方向に印加された磁場 $B_\mathrm{e} = \left(0, B_\mathrm{y}, 0\right)$ を考える，このとき接合面を通り抜ける磁場の厚さは，$t_\mathrm{B} = d + \lambda_\mathrm{L1} + \lambda_\mathrm{L2}$ と定義される．

磁場が印加された時の接合面内の電流密度 $\boldsymbol{J}$ (Josephson 電流密度) について，z 方向に沿った 2 つの点 P と Q の位相シフトを考える．この位相シフト $\varphi(Q) - \varphi(P)$ はゲージ不変な位相差 (Gauge-invariant phase difference) で，磁場によって位相が変化し，図 2.2 に示してある赤い破線を線積分することで決定できる．この位相の変化の合計は，点線を 1 周した時の値，つまり，$2\pi n$ である必要がある．一般的に $\boldsymbol{J}$ は，

$$\boldsymbol{J} = \frac{|\psi|^2}{\mu_0 \lambda^2}\left(\frac{\phi_0}{2\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\,\varphi - \boldsymbol{A}\right) \tag{1}$$

で与えられる．ここで，μ_0 は真空の透磁率，λ は磁場侵入長，ϕ_0 は磁束量子，φ は位相， $\boldsymbol{A}$ はベクトルポテンシャルである。(1) 式を用いて $\boldsymbol{A}$ について解くと

$$\boldsymbol{A} = \frac{\phi_0}{2\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\,\varphi - \mu_0 \lambda^2 \boldsymbol{J} \tag{2}$$

となる．

ここで，gauge 変換を用いる．gauge 変換とは，場の理論において，理論の基本方程式を不変に保つ変換のことをさす．つまり，物理現象そのものが変化しなければ，式の形を変えても良いことである．ここでは，以下を適用する．

$$\begin{cases} \varphi \to \varphi + \chi \\ \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} + \dfrac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\chi \end{cases} \tag{3}$$

(3) 式を(1) 式に代入すると

$$\boldsymbol{J} = \frac{|\psi|^2}{\mu_0\lambda^2}\left[\frac{\phi_0}{2\pi}\,(\boldsymbol{\nabla}\,\varphi + \nabla\,\chi) - \left(\boldsymbol{A} + \frac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\chi\right)\right]$$
$$= \frac{|\psi|^2}{\mu_0\lambda^2}\left[\left(\frac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\varphi - \boldsymbol{A}\right) + \frac{\phi_0}{2\pi}\,(\boldsymbol{\nabla}\,\chi - \boldsymbol{\nabla}\,\chi)\right]$$
$$= \frac{|\psi|^2}{\mu_0\lambda^2}\left(\frac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\varphi - \boldsymbol{A}\right)$$

となり，(1) 式と等価になる．これを gauge 不変という．

接合面を通り抜ける磁束を $\boldsymbol{\Phi}$ とすると，

$$\Phi = \oint_{\mathrm{C}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = B_y(d+\lambda_1+\lambda_2)dz = B_y t_B dz\,. \tag{4}$$

または，以下のようにもあらわすことができる．

$$\Phi = \int_{\mathrm{Q}_a}^{\mathrm{Q_b}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{Q_b}}^{\mathrm{P_c}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{P_c}}^{\mathrm{P_d}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{P_d}}^{\mathrm{Q}_a} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$
$$= \int_{\mathrm{Q}_a}^{\mathrm{Q_b}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{Q_b}}^{\mathrm{P_c}} \left(\frac{\phi_0}{2\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\,\varphi - \mu_0\lambda^2\boldsymbol{J}\right)\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{P_c}}^{\mathrm{P_d}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{P_d}}^{\mathrm{Q}_a} \left(\frac{\phi_0}{2\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\,\varphi - \mu_0\lambda^2\boldsymbol{J}\right)\cdot d\boldsymbol{l}$$
$$= \int_{\mathrm{Q}_a}^{\mathrm{Q_b}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \frac{\phi_0}{2\pi}\,[\varphi(\mathrm{P_c}) - \varphi(\mathrm{Q_b})] - \int_{\mathrm{Q_b}}^{\mathrm{P_c}} \mu_0\lambda^2\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{\mathrm{P_c}}^{\mathrm{P_d}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \frac{\phi_0}{2\pi}\,[\varphi(\mathrm{Q}_a) - \varphi(\mathrm{P_d})]$$
$$- \int_{\mathrm{P_d}}^{\mathrm{Q}_a} \mu_0\lambda^2\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{l}$$
$$= \int_{\mathrm{Q}_a}^{\mathrm{Q_b}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \frac{\phi_0}{2\pi}\,[\varphi(\mathrm{P_c}) - \varphi(\mathrm{Q_b})] + \int_{\mathrm{P_c}}^{\mathrm{P_d}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \frac{\phi_0}{2\pi}\,[\varphi(\mathrm{Q}_a) - \varphi(\mathrm{P_d})]$$
$$+ \int_{\mathrm{P_c}}^{\mathrm{Q_b}} \mu_0\lambda^2\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{l} - \int_{\mathrm{P_d}}^{\mathrm{Q}_a} \mu_0\lambda^2\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{l} \qquad \left(※\int_{\mathrm{P_c}}^{\mathrm{Q_b}} \mu_0\lambda^2\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{\mathrm{P_d}}^{\mathrm{Q}_a} \mu_0\lambda^2\boldsymbol{J}\cdot d\boldsymbol{l}\right)$$

$$= \frac{\phi_0}{2\pi}\,[\varphi(\mathrm{P_c}) - \varphi(\mathrm{P_d})] - \int_{\mathrm{P_d}}^{\mathrm{P_c}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} + \frac{\phi_0}{2\pi}\,[\varphi(\mathrm{Q}_a) - \varphi(\mathrm{Q_b})] - \int_{\mathrm{Q_b}}^{\mathrm{Q}_a} \boldsymbol{A}\cdot dl$$
$$= \frac{\phi_0}{2\pi}\,[\varphi(\mathrm{P_c}) - \varphi(\mathrm{P_d})] - \int_{\mathrm{P_d}}^{\mathrm{P_c}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} - \frac{\phi_0}{2\pi}\,[\varphi(\mathrm{Q_b}) - \varphi(\mathrm{Q}_a)] - \int_{\mathrm{Q_b}}^{\mathrm{Q}_a} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$$
$$= \frac{\phi_0}{2\pi}\varphi(\mathrm{P}) - \frac{\phi_0}{2\pi}\varphi(\mathrm{Q})$$

$$\therefore\ \Phi = \frac{\phi_0}{2\pi}\varphi(\mathrm{P}) - \frac{\phi_0}{2\pi}\varphi(\mathrm{Q}) \tag{5}$$

$$\begin{cases} \varphi(\mathrm{P}) = \varphi(\mathrm{P_c}) - \varphi(\mathrm{P_d}) - \dfrac{2\pi}{\phi_0}\displaystyle\int_{\mathrm{P_d}}^{\mathrm{P_c}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \\ \varphi(\mathrm{Q}) = \varphi(\mathrm{Q_b}) - \varphi(\mathrm{Q_a}) - \dfrac{2\pi}{\phi_0}\displaystyle\int_{\mathrm{Q}_a}^{\mathrm{Q_b}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} \end{cases} \tag{6}$$

(4), (5) 式より，

$$\varphi(\mathrm{P})-\varphi(\mathrm{Q})=\frac{2\pi\Phi}{\phi_0}=\frac{2\pi}{\phi_0}B_y t_B dz \tag{7}$$

以上より，上下の超伝導体の位相差が外部から印加された磁場によって変化することが証明できる．

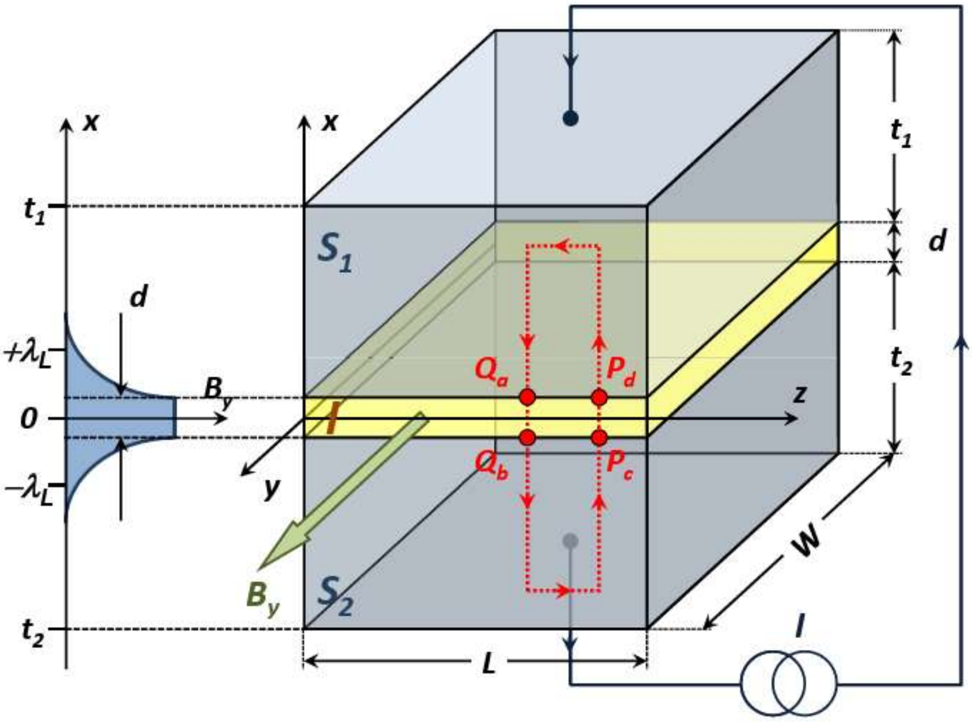


図 2.2 Short junction に磁場が印加された時の概略図 [14]．$\boldsymbol{S_1}$ は上部超伝導体，$\boldsymbol{S_2}$ は下部超伝導体．電流は $\boldsymbol{x}$ 方向に流れており，$\boldsymbol{y}$ 方向から磁束を印加している．赤い破線はベクトルポテンシャル$\boldsymbol{A}$ の積分経路を表している．Short junction では超伝導体が London の磁場侵入長さ $\boldsymbol{\lambda_{\mathrm{L}}}$ より長い．

2.4 ゲージ不変位相差 (Gauge-invariant phase difference)

2.3 節では，下部超伝導体から上部超伝導体を鎖交する磁束について考えたが，ここでは，ここではより厳密に磁束が鎖交する範囲を絶縁層に絞って考える．この領域におけるゲージ不変位相差は，

$$\theta(x,y)=\varphi_1\left(x,y,\frac{d_j}{2}\right)-\varphi_2\left(x,y,-\frac{d_j}{2}\right)-\frac{2\,\pi}{\phi_0}\int_{-\frac{d_{\mathrm{j}}}{2}}^{+\frac{d_{\mathrm{j}}}{2}}A_z\,(x,y,z)dz \tag{8}$$

である．φ_1は上部のストリップの位相，φ_2 は下部のストリップの位相で，d_{j} の絶縁層の厚さである．積分の経路をC_x とすると，

$$\oint_{C_x} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} = \int \boldsymbol{B}\ \ d\mathbf{S} = B_x\, d_j\, \Delta\boldsymbol{y} \tag{9}$$

$$\oint_{C_x} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} = \int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} + \int_{P_2}^{P_3} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} + \int_{P_3}^{P_4} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} + \int_{P_4}^{P_1} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x}$$

$$= -\int_{P_2}^{P_1} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} - \int_{P_3}^{P_2} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} + \int_{P_3}^{P_4} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} + \int_{P_4}^{P_1} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x}$$

$$= -\int_{y}^{y+\Delta y} A_y\left(x, y+\Delta y, +\frac{d_j}{2}\right) d\boldsymbol{y} - \int_{-\frac{d_j}{2}}^{+\frac{d_j}{2}} A_z(x,y,z)\, d\boldsymbol{z}$$

$$+ \int_{y}^{y+\Delta y} A_y\left(x, y, -\frac{d_j}{2}\right) d\boldsymbol{y} + \int_{-\frac{d_j}{2}}^{+\frac{d_j}{2}} A_z(x,y+\Delta y,z)\, d\boldsymbol{z}$$

$$= \left[-A_y\left(x,y,+\frac{d_j}{2}\right) + A_y\left(x,y,-\frac{d_j}{2}\right)\right]\Delta y + \int_{-\frac{d_j}{2}}^{+\frac{d_j}{2}} [A_z(x,y+\Delta y,z) - A_z(x,y,z)]d\boldsymbol{z} \tag{10}$$

(1) 式において$|\psi|^2 = 1$ とすると，

$$A_y = \frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \mu_0\lambda^2 J_y \tag{11}$$

これを(10) 式に代入すると，

$$\oint_{C_x} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} = \left[-\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial\varphi\left(x,y,+\frac{d_j}{2}\right)}{\partial y} + \mu_0\lambda^2 J_y\left(x,y,+\frac{d_j}{2}\right) + \frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial\varphi\left(x,y,-\frac{d_j}{2}\right)}{\partial y}\right.$$

$$\left. + \mu_0\lambda^2 J_y\left(x,y,-\frac{d_j}{2}\right)\right]\Delta y + \int_{-\frac{d_j}{2}}^{+\frac{d_j}{2}} \frac{\partial A_z(x,y,z)}{\partial y} dz\, \Delta y$$

$$= -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\phi_0}{2\pi}\varphi\left(x,y,+\frac{d_j}{2}\right) - \frac{\phi_0}{2\pi}\partial\varphi\left(x,y,-\frac{d_j}{2}\right) - \int_{-\frac{d_j}{2}}^{+\frac{d_j}{2}} A_z(x,y,z)\, dz\right]\Delta y$$

$$+\mu_0\lambda^2\left[J_y\left(x,y,+\frac{d_j}{2}\right) - J_y\left(x,y,-\frac{d_j}{2}\right)\right]$$

$$= -\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial\theta\ (x,y)}{\partial y}\Delta y + \mu_0\lambda^2\left[J_y\left(x,y,+\frac{d_j}{2}\right) - J_y\left(x,y,-\frac{d_j}{2}\right)\right]$$

$$\therefore \oint_{C_x} \boldsymbol{A}\, d\boldsymbol{x} = -\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial\theta\ (x,y)}{\partial y}\Delta y + \mu_0\lambda^2\left[J_y\left(x,y,+\frac{d_j}{2}\right) - J_y\left(x,y,-\frac{d_j}{2}\right)\right] \tag{12}$$

(9) 式と(12) 式を用いて，

$$\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial y} = \mu_0\lambda^2\left[J_y\left(x,y,+\frac{d_\mathrm{j}}{2}\right) - J_y\left(x,y,-\frac{d_\mathrm{j}}{2}\right)\right] - B_x\, d_j \tag{13}$$

y 方向についても同様に考えると (図 2.4),

$$\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial\theta(x,y)}{\partial x} = \mu_0\lambda^2\left[-J_x\left(x,y,+\frac{d_\mathrm{j}}{2}\right) + J_x\left(x,y,-\frac{d_\mathrm{j}}{2}\right)\right] - B_y\, d_j \tag{14}$$

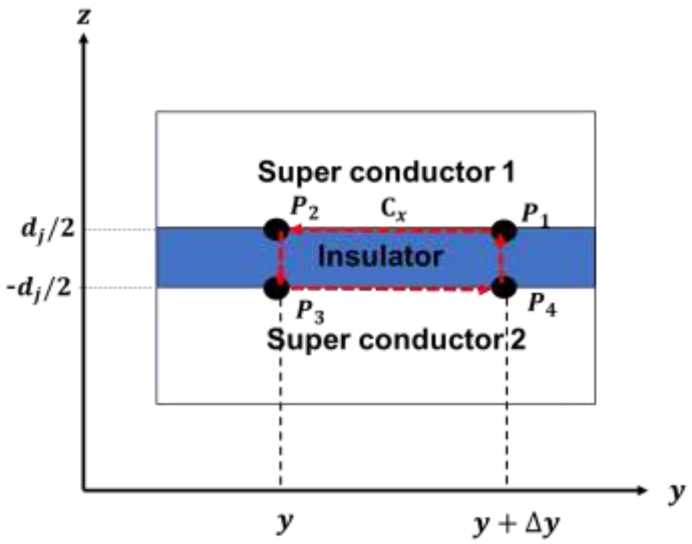


図 2.3 絶縁層内についてのゲージ不変位相差. P_1~ P_4 の座標は, $P_1(x,y+\Delta y,d_j/2)$, $P_2(x,y,d_j/2)$, $P_3(x,y,-d_j/2)$, $P_4(x,y+\Delta y,-d_j/2)$.

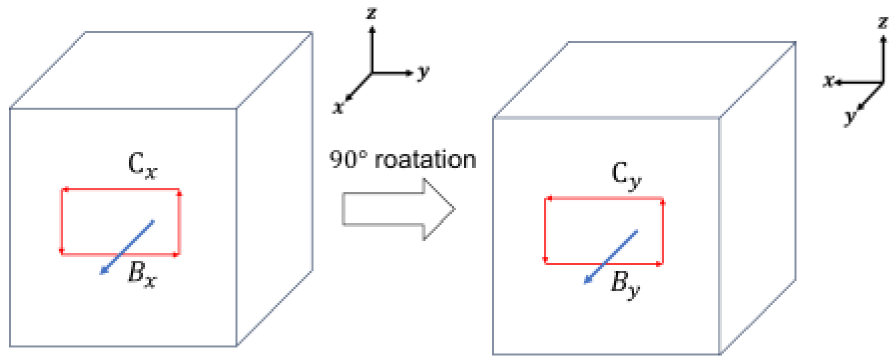


図 2.4 (14) 式を導出する際の座標変換. z 軸を基準に 90° 回転すると $(x,y,z) \rightarrow (y,-x,z)$

2.5 超伝導体を流れる電流

続けて，超伝導体の電流について考える．(1) 式において$|\psi|^2 = 1$として，rot を取ると

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\boldsymbol{J} &= \mathrm{rot}\,\{\frac{1}{\mu_0\lambda^2}\left(\frac{\phi_0}{2\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\,\varphi - \boldsymbol{A}\right)\} \\ &= -\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0\lambda^2} \\ &\cong -\frac{\boldsymbol{H}}{\lambda^2} \end{aligned} \tag{15}$$

となる．(15) 式において，$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ 及び $\mathrm{rot}\,(\boldsymbol{\nabla}\,\varphi) = 0$ を用いた．(15) 式を用いると，上部超伝導体の電流密度 $\boldsymbol{J}$ は，

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial J_y}{\partial z} = -\dfrac{H_x}{\lambda^2} \\ -\dfrac{\partial J_x}{\partial z} = -\dfrac{H_y}{\lambda^2} \\ \dfrac{\partial J_y}{\partial x} = -\dfrac{H_z}{\lambda^2} \end{cases} \tag{16}$$

(16) 式から J_x, J_yは次のようにあらわせる．

$$\begin{cases} J_y = \dfrac{H_x}{\lambda^2}\left(z - \dfrac{d_{\mathrm{s1}} + d_{\mathrm{j}}}{2}\right) - \dfrac{H_z}{\lambda^2}x \\ J_x = -\dfrac{H_y}{\lambda^2}\left(z - \dfrac{d_{\mathrm{s1}} + d_{\mathrm{j}}}{2}\right) \end{cases} \tag{17}$$

上部超伝導体の電流密度 $\boldsymbol{J}_1$，下部超伝導体の電流密度 $\boldsymbol{J}_2$ は次のようにあらわせる．

$$\boldsymbol{J}_1 = \frac{1}{\lambda^2}\left[-xH_z\hat{\boldsymbol{y}} + \left(z - \frac{d_{s1} + d_j}{2}\right)\left(-H_y\hat{\boldsymbol{x}} + H_x\hat{\boldsymbol{y}}\right)\right] \tag{18}$$

$$\boldsymbol{J}_2 = \frac{1}{\lambda^2}\left[\ yH_z\hat{\boldsymbol{x}} + \left(z + \frac{d_{s2} + d_j}{2}\right)\left(-H_y\hat{\boldsymbol{x}} + H_x\hat{\boldsymbol{y}}\right)\right] \tag{19}$$

$\hat{\boldsymbol{x}}, \hat{\boldsymbol{y}}$ は，x 軸方向，y 軸方向それぞれの単位ベクトルある．x 軸方向の電流密度は次のように定義できる．

$$\begin{cases} J_{1x}\left(x, y, +\dfrac{d_{\mathrm{j}}}{2}\right) = \dfrac{H_y}{\lambda^2}\,\dfrac{d_{\mathrm{s}}}{2} \\ J_{2x}\left(x, y, -\dfrac{d_{\mathrm{j}}}{2}\right) = \dfrac{H_z}{\lambda^2}y - \dfrac{H_y}{\lambda^2}\,\dfrac{d_{\mathrm{s}}}{2} \end{cases} \tag{20}$$

(14) 式を用いて，

$$\begin{aligned} \frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \mu_0 H_y d_s - \mu_0 H_z\,y + \mu_0 H_y d_{\mathrm{j}} \\ &= \mu_0 H_y\left(d_{\mathrm{s}} + d_{\mathrm{j}}\right) - \mu_0 H_z y \\ &= \mu_0\left(d_{\mathrm{eff}}\,H_y - H_z y\right) \end{aligned} \tag{21}$$

d_{eff} は接合の有効厚さであり，超伝導ストリップの厚さ d_{s} が λ_{L} より薄い場合，すなわち Short junction では $d_{\mathrm{eff}} = d_{\mathrm{j}} + d_{\mathrm{s}}$ である[15].

$$\frac{\phi_0}{2\pi}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \mu_0 H_y d_s - \mu_0 H_z\, y + \mu_0 H_y d_{\mathrm{j}}$$
$$= \mu_0 H_y\left(d_{\mathrm{s}} + d_{\mathrm{j}}\right) - \mu_0 H_z y$$
$$= \mu_0\left(d_{\mathrm{eff}}\, H_x - H_z x\right) \tag{22}$$

(21), (22) 式を積分すると

$$\frac{\phi_0}{2\pi}\theta(x,y) = \mu_0\left[d_{\mathrm{eff}}\left(xH_y - yH_x\right) - xyH_z\right] + \mathrm{const.} \tag{23}$$

$$\theta\,(x,y) = \theta_0 + \frac{2\pi\mu_0}{\phi_0}\left[d_{\mathrm{eff}}\left(xH_y - yH_x\right) - xyH_z\right] \tag{24}$$

(24) 式の 2 項目を$\theta_1(x,y)$とすると，

$$\theta(x,y) = \theta_0 + \theta_1(x,y) \tag{25}$$

となる．θ_0は場所に依存しない位相差，$\theta_1(x,y)$ は磁場に依存する位相差であり，接合面の場所 (x,y) の関数である．

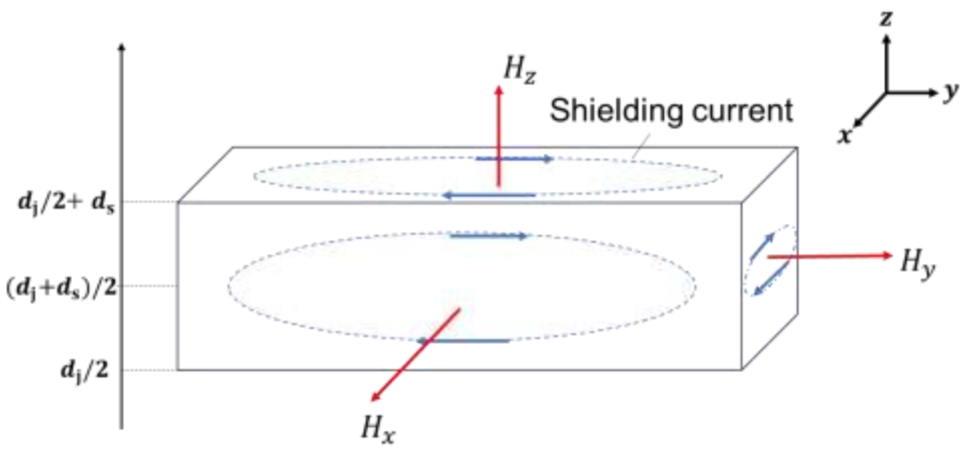


図 2.5 上部超伝導体に磁場が印加された時の遮蔽電流．H_x, H_y, H_z はそれぞれの磁場の方向をあらわす.

第 3 章 解析モデルと接合面内の電流の理論式

3.1 解析モデル

図 3.1 は，接合面内の臨界電流密度 J_c の分布を示したものである．縦軸 y/w は，接合面の縦の長さ，横軸 y/w は，接合面の横の長さをそれぞれ w でスケールしている．本研究では接合面内の J_c が均一に分布している場合と，接合面内の外側にのみ J_c が分布したモデルの計算を行った．水色は，$J_c > 0$ が一定の領域，黒色は，$J_c = 0$ の領域を示している．x_0 は x 軸方向，y_0 は y 軸方向の $J_c = 0$ の領域をそれぞれ表しており，その領域は，$2x_0 \times 2y_0$ であらわされる．

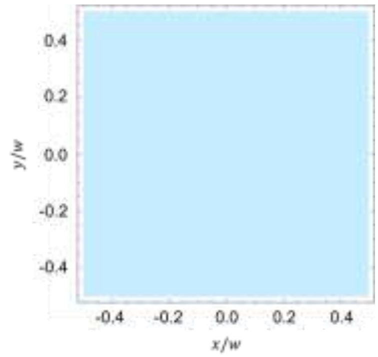
本計算では，$J_c = 0$ の領域の形状が正方形の場合と長方形の場合を考えた．正方形の場合は，x_0, y_0 を 0.1 ずつ増加させ，磁気干渉がどのように変化するかを検証した．また，長方形の場合は，横長の長方形 $(x_0 > y_0)$ と縦長の長方形 $(x_0 < y_0)$ の 2 つの形状を考えた．これらの形状では，鎖交する磁束の量が x 軸方向，y 軸方向でそれぞれ異なるので，正方形の場合とは異なる磁気干渉パターンが考えられる．

考察にも記述しているが，内側にのみ J_c が分布したモデルは接合面内に J_c 均一に分布したモデルを縮小したものと等価なので，計算は行っていない．

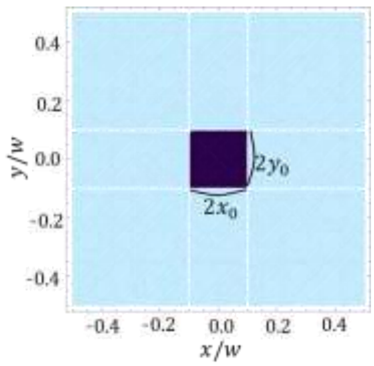
これらのモデルの計算の理由については，1 章で十字型接合では，垂直磁場では磁気干渉が生じないと述べたが，先行研究において，垂直磁場は接合面の 4 隅付近を変調することが分かった．この結果から，接合面内の外側を流れる電流が大きくなることで垂直磁場中でも磁気干渉が発生することが期待される．また，垂直磁場での磁気干渉が変わることで斜め磁場中での磁気干渉も臨界電流密度が均一に分布している場合と異なることが考えられる．

オーバーラップ接合については臨界電流密度が均一に分布している場合においても垂直磁場中で磁気干渉が発生することが分かっている．Barone の報告を基に，臨界電流密度分布の違いにより，垂直磁場中及び斜め磁場中でも磁気干渉が異なることが考えられる．

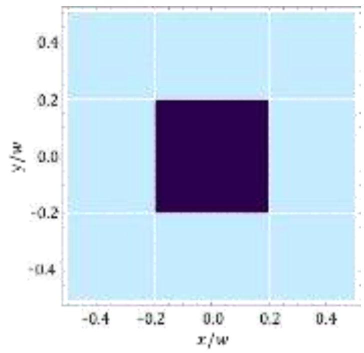
(a) $(x_0, y_0) = (0, 0)$



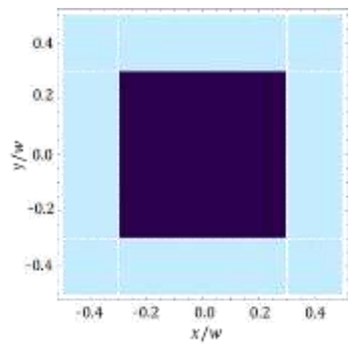
(b) $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$



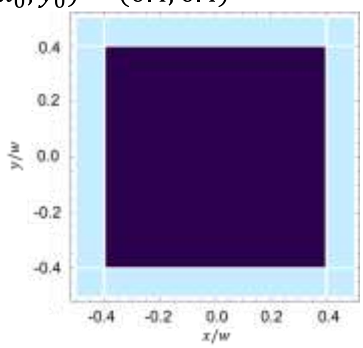
(c) $(x_0, y_0) = (0.2, 0.2)$



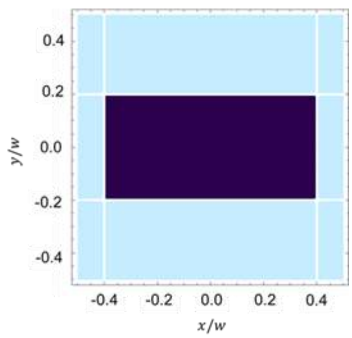
(d) $(x_0, y_0) = (0.3, 0.3)$



(e) $(x_0, y_0) = (0.4, 0.4)$



(f) $(x_0, y_0) = (0.4, 0.2)$



(g) $(x_0, y_0) = (0.2, 0.4)$

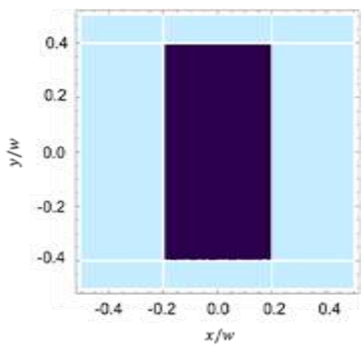


図 3.1 計算のモデル．水色の領域は$\boldsymbol{J_c > 0}$が一定の値で，黒色の領域は$\boldsymbol{J_c = 0}$の領域.

3.2 接合面内の電流密度及び電流

一般に、超伝導体内を流れる直流電流密度 $\boldsymbol{J}$ は,

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{\mu_0 \lambda^2}\left(\frac{\phi_0}{2\pi}\,\boldsymbol{\nabla}\,\varphi - \boldsymbol{A}\right)\ \ (|\psi|^2 = 1) \tag{26}$$

で与えられる。ここで，μ_0 は真空の透磁率，λ は磁場侵入長，ϕ_0 は磁束量子，φ は位相， $\boldsymbol{A}$ は，ベクトルポテンシャルである.

上部のストリップの位相を φ_1, 下部のストリップの位相を φ_2 とすると，接合におけるゲージ不変位相差は，(8) 式で定義される．d_j は，接合間の絶縁層の厚さである．このゲージ不変位相差によるジョセフソン電流密度は,

$$J_z(x,y) = J_\mathrm{c}\sin\theta(x,y) \tag{27}$$

で表され，J_c は接合面内の臨界電流密度である.

十字型接合とオーバーラップ接合で，(24) 式における $\theta_1(x,y)$ の導出が異なる．(28) 式に十字型接合、(29) 式にオーバーラップ接合の $\theta_1(x,y)$ についてそれぞれ示す.

$$\theta_{1-\mathrm{cross}}(x,y) = \frac{2x}{w}\frac{\pi\Phi_y}{\phi_0} - \frac{2y}{w}\frac{\pi\Phi_x}{\phi_0} - \frac{2xy}{w^2}\frac{\pi\Phi_z}{\phi_0} \tag{28}$$

$$\theta_{1-\mathrm{overlap}}(x,y) = \frac{2x}{w}\frac{\pi\Phi_y}{\phi_0} - \frac{2y}{w}\frac{\pi\Phi_x}{\phi_0} + \frac{16\,\pi\,\Phi_z}{\phi_0 w^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{k_n^3}e^{-k_n w/2}\cosh\left(\frac{k_n x}{w}\right)\sin\left(\frac{k_n y}{w}\right) \tag{29}$$

各式中の Φ_x, Φ_y 及び Φ_z は，接合面を鎖交する磁束を表しており，以下のようにあらわされる.

$$\Phi_x = \mu_0\, H_x w d_\mathrm{eff} \tag{30}$$

$$\Phi_y = \mu_0\, H_y w d_\mathrm{eff} \tag{31}$$

$$\Phi_z = \mu_0\, H_z w^2 \tag{32}$$

また，(29) 式中の k_n は次のようにあらわされる.

$$k_n = (2n-1)\,\pi/w \qquad (n \in \mathbb{Z}) \tag{33}$$

(29) 式の導出については次の章に記載している.

接合面を流れる正味の電流 I_z は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{-w/2}^{+w/2}\mathrm{d}x\int_{-w/2}^{+w/2}\mathrm{d}y\,J_\mathrm{c}\sin\theta \\ &= \int_{-w/2}^{+w/2}\mathrm{d}x\int_{-w/2}^{+w/2}\mathrm{d}y\,J_\mathrm{c}\sin[\theta_0 + \theta_1(x,y)] \end{aligned} \tag{34}$$

(34) 式を以下のようを以下の式に書き換える.

$$I_\mathrm{z} = \mathrm{Im}\,(F\exp\mathrm{i}\theta_0) \tag{35}$$

ここで F は,

$$F = \int_{-w/2}^{+w/2} \mathrm{d}x \int_{-w/2}^{+w/2} \mathrm{d}y\, J_\mathrm{c} \exp \mathrm{i}\theta_1(x,y) \tag{36}$$

をあらわしている．ここで,

$$|F| = \left| \int_{-w/2}^{+w/2} dx \int_{-w/2}^{+w/2} dy\, J_\mathrm{c} \exp \mathrm{i}\theta_1(x,y) \right| \tag{37}$$

を用いると (36) 式は,

$$F = |F| \exp \mathrm{i}g \tag{38}$$

となる．g は，F の位相 ($g = \mathrm{Arg}(F)$) である．(28), (29) 式及び，$g = \mathrm{Arg}(F)$ を用いると， 十字型接合及びオーバーラップ接合の電流密度 (27) 式について、以下のように書き換えることができる．

$$J_{z\mathrm{-cross}}(x,y) = J_\mathrm{c} \cos\left(\frac{2x}{w}\frac{\pi\Phi_y}{\phi_0} - \frac{2y}{w}\frac{\pi\Phi_x}{\phi_0} - \frac{2xy}{w^2}\frac{\pi\Phi_z}{\phi_0} - g\right) \tag{39}$$

$$J_{z\mathrm{-overlap}}(x,y) = J_\mathrm{c} \cos(\frac{2x}{w}\frac{\pi\Phi_y}{\phi_0} - \frac{2y}{w}\frac{\pi\Phi_x}{\phi_0} + \frac{16\,\pi\,\Phi_z}{\phi_0 w^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{k_n^3} e^{-k_n w/2} \cosh\left(\frac{k_n x}{w}\right) \sin\left(\frac{k_n y}{w}\right) - g) \tag{40}$$

(35) 式，(38) 式 を用いて接合面内の電流 I_z をあらわす (34) 式は以下のようになる．

$$I_z = \mathrm{Im}[|F| \exp(\theta_0 + g)] = |F| \sin(\theta_0 + g) \tag{41}$$

$\theta_0 + g = {}^{\pi}/_{2} + 2n\pi$ のとき，I_z は臨界電流 I_c として定義される．このときI_cは,

$$I_\mathrm{c}(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) = \left| \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} dx \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} dy\, J_\mathrm{c} \exp \mathrm{i}\theta_1(x,y) \right| \tag{42}$$

となる．また，ゼロ磁場のとき，I_c を I_c0 として定義する．このとき I_c0 は，以下のようになる．

$$I_\mathrm{c0} = I_\mathrm{c}(0,0,0) = \left| \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} dx \int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}} dy\, J_\mathrm{c} \right| \tag{43}$$

3.3 十字型接合の平行、垂直、斜め磁場中での直流臨界電流の磁気干渉

十字型接合の直流臨界電流の磁気干渉は解析的に解くことが可能である [8)]．接合面に対して平行な磁場が印加された時の I_c は,

$$\frac{I_\mathrm{c}(\Phi_x, \Phi_y, 0)}{I_\mathrm{c0}} = \left| \frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi_x}{\phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi_x}{\phi_0}} \; \frac{\sin\left(\frac{\pi\Phi_y}{\phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi_y}{\phi_0}} \right| \tag{44}$$

接合面に対して垂直な磁場が印加された時の I_c は,

$$\frac{I_c(0,0,\Phi_z)}{I_{c0}} = \left| \frac{\mathrm{Si}\left(\frac{\pi\Phi_z}{2\phi_0}\right)}{\frac{\pi\Phi_z}{2\phi_0}} \right| \tag{45}$$

2次元斜め磁場中での I_c は,

$$\frac{I_c(\Phi_x,0,\Phi_z)}{I_{c0}} = \left| \frac{\mathrm{Si}\left[\pi\left(\Phi_x+\frac{\Phi_z}{2}\right)\right]-\mathrm{Si}\left[\pi\left(\Phi_x-\frac{\Phi_z}{2}\right)\right]}{\frac{\pi\Phi_z}{\phi_0}} \right| \tag{46}$$

$$\frac{I_c(0,\Phi_y,\Phi_z)}{I_{c0}} = \left| \frac{\mathrm{Si}\left[\pi\left(\Phi_y+\frac{\Phi_z}{2}\right)\right]-\mathrm{Si}\left[\pi\left(\Phi_y-\frac{\Phi_z}{2}\right)\right]}{\frac{\pi\Phi_z}{\phi_0}} \right| \tag{47}$$

3次元斜め磁場中での I_c は,

$$\frac{I_c(\Phi_x,\Phi_y,\Phi_z)}{I_{c0}} = \left| \frac{ie^{-\frac{i\alpha\beta}{\gamma}}}{4\gamma}\left[G(\eta_1)-G(\eta_2)-G(\eta_3)-G(\eta_4)\right] \right| \tag{48}$$

$$G(z)=\int_0^z \frac{1-e^{it}}{t}\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\,\mathrm{Si}(z)-\mathrm{Ci}(z)+\mathrm{C}+\mathrm{In}\,z \tag{49}$$

$$\eta_1 = \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)}{\gamma} \tag{50}$$

$$\eta_2 = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta+\gamma)}{\gamma} \tag{51}$$

$$\eta_3 = \frac{(\alpha+\gamma)(\beta-\gamma)}{\gamma} \tag{52}$$

$$\eta_4 = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}{\gamma} \tag{53}$$

ここで，$\alpha=\pi\Phi_x/\phi_0$，$\beta=\pi\Phi_y/\phi_0$，$\gamma=\pi\Phi_z/2\phi_0$ $\mathrm{Si}(z)=-\int_z^\infty \mathrm{d}t(\sin t)/t$ の正弦積分，$\mathrm{Ci}(z)=-\int_z^\infty \mathrm{d}t(\cos t)/t$ は余弦積分で，$\mathrm{C}=0.577\ldots$はオイラー定数である．式の導出については，文献 8)，13) を参照した．

3.4 オーバーラップ接合の位相差 $\theta_1(x,y)$

オーバーラップ型接合の位相差の $\theta_1(x,y)$ 導出を記す．また，上下の超伝導ストリップに関するパラメータを区別する添え字を j とする．上部ストリップ（$j=1$），下部超伝導ストリップ（$j=2$）における電流密度 J_j は，z 軸方向への磁場 $H_z\hat{z}$ によるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ および上下ストリップにおける位相 φ_j を用いて,

$$J_j = \frac{1}{\mu_0\lambda^2}\left(\frac{\phi_0}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\varphi_j-\boldsymbol{A}\right) \tag{54}$$

とあらわされる．$\boldsymbol{A}$ は x 軸方向のみの成分をもっているとすると，

$$\mu_0 H_z = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \tag{55}$$

$$A_x = -\mu_0 H_z y \tag{56}$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} = 0 \tag{57}$$

が成り立つ．ここで，

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) \tag{58}$$

上下ストリップが x 軸に関して半無限であるという条件から，

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi_1 \to 0\ (x \to \infty) \tag{59}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\varphi_2 \to 0\ (x \to -\infty) \tag{60}$$

が成り立ち，上下ストリップを x 軸方向に流れる電流密度 $J_{\mathrm{j}x}$ はそれぞれ，

$$J_{1x} \to -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} A_x = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}(-\mu_0 H_z y) = \frac{H_z}{\lambda^2} y \tag{61}$$

$$J_{2x} \to -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2} A_x = -\frac{1}{\mu_0 \lambda^2}(-\mu_0 H_z y) = \frac{H_z}{\lambda^2} y \tag{62}$$

である．(59)式，(60)式の微分方程式を解くため，境界条件を以下のように定めた．
上部ストリップについて，

$$\begin{cases} J_{1x} = 0\ \left(x = \dfrac{w}{2}\right) \\ J_{1x} \to \dfrac{H_z}{\lambda^2} y\ (x \to +\infty) \\ J_{1y} = 0\ \left(y = \pm\dfrac{w}{2}\right) \end{cases} \tag{63}$$

下部ストリップについて，

$$\begin{cases} J_{2x} = 0\ \left(x = -\dfrac{w}{2}\right) \\ J_{2x} \to \dfrac{H_z}{\lambda^2} y\ (x \to -\infty) \\ J_{2y} = 0\ \left(y = \pm\dfrac{w}{2}\right) \end{cases} \tag{64}$$

と定める．上部ストリップの位相 φ_1 についての方程式は次のようになる．

$$\boldsymbol{\nabla}^2 \varphi_1(x, y) = 0\ \left(-\frac{w}{2} < x < \frac{w}{2}, -\frac{w}{2} < y < \frac{w}{2}\right) \tag{65}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = 0\ \left(y = \pm\frac{w}{2}\right) \tag{66}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = -\frac{2\pi \mu_0 H_z y}{\phi_0}\ \left(x = -\frac{w}{2}\right) \tag{67}$$

$$\varphi_1(x,y) \to 0 \ (x \to \infty) \tag{68}$$

が成り立ち，$\varphi_1(x,y)$ についての一般解は，

$$\varphi_1 \sim \alpha\cos(ky) + \beta\sin(ky) \tag{69}$$

と書くことができる．(66)式，(69) 式を用いて，

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} \sim -k\alpha\sin(ky) + k\beta\cos(ky) = 0 \ \left(y = \pm\frac{w}{2}\right) \tag{70}$$

を得る．(70) 式について，以下の二通りの解が得られる．なお，n は任意の整数である．

$$\alpha \neq 0,\ \beta = 0,\ k\frac{w}{2} = n\pi \tag{71}$$

$$\alpha = 0,\ \beta \neq 0,\ k\frac{w}{2} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \tag{72}$$

(71) 式，(72) 式は，共に (70) 式の解として満足するが，ここでは，H_z が印加された時にストリップを流れる遮蔽電流について考えている。図 3.2 に示すように遮蔽電流は cos カーブを描くようにして流れる．よって (70) 式の解としては，(72) 式が適切である．したがって，

$$\varphi_1(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(x)\sin(k_n y),\ \ k_n = (2n-1)\frac{\pi}{w} \tag{73}$$

となり，フーリエ正弦級数の形で表される．

ここで、$\beta_n(x)$ を求める。フーリエ正弦係数の公式を用いて，

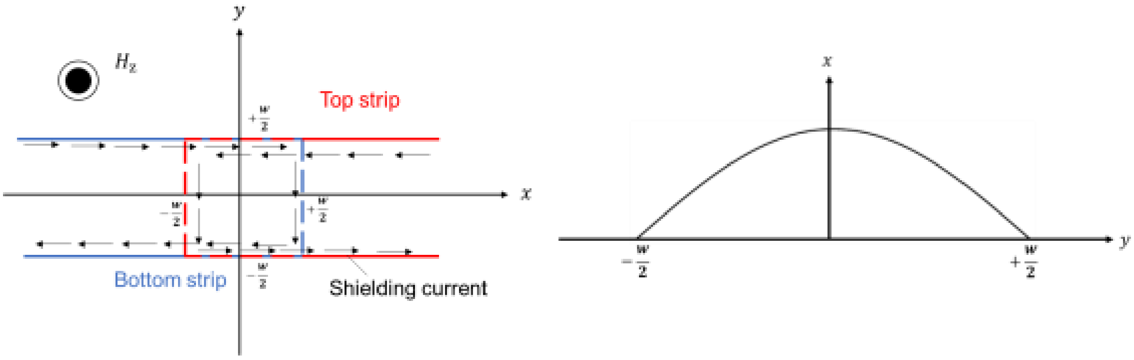


図 3.2 左図は垂直磁場が印加された時のオーバーラップ接合の接合面内の遮蔽電流を上から見た様子．右側の図に示すように遮蔽電流 は cos 波を描くように流れる．

$$\beta_n(x) = \frac{2}{w}\int_{-w/2}^{+w/2} \varphi_1(x,y)\sin(k_n y)\,\mathrm{d}y \tag{74}$$

となる．補足として $\beta_m(x)$ については，

$$\begin{aligned}\beta_m(x) &= \frac{2}{w}\int_{-w/2}^{+w/2} \varphi_1(x,y)\sin(k_m y)\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{2}{w}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)\int_{-w/2}^{+w/2}\sin(k_n y)\sin(k_m y)\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{w}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)\int_{-w/2}^{+w/2}\frac{1}{2}\{\cos(k_n-k_m)\,y-\cos(k_n+k_m)\,y\}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{w}\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)\int_{-w/2}^{+w/2}\{\cos(k_n-k_m)\,y-\cos(k_n+k_m)\,y\}\,\mathrm{d}y \tag{75}$$

(75) 式に関して，クロネッカーのデルタ $\delta_{n,m}$ を用いて，$\beta_m(x)$ を以下のように定義する．

$$\beta_m(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n\delta_{n,m} \tag{76}$$

$$\delta_{n,m} = \begin{cases}1\ (n=m)\\ 0\ (n\neq m)\end{cases} \tag{77}$$

(65) ,(74)式より，

$$\frac{2}{w}\int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}}\left(\frac{\partial^2\varphi_1(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1(x,y)}{\partial y^2}\right)\sin k_n y\,dy = 0 \tag{78}$$

$$0 = \frac{2}{w}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}}\varphi_1\sin k_n y\,dy\ +\ \frac{2}{w}\int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\sin k_n y\,dy$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{2}{w}\int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}}\varphi_1\sin k_n y\,dy\ +\ \frac{2}{w}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\sin k_n y\right]_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}}-\frac{2}{w}k_n\int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\cos k_n y\,dy$$

$$= \frac{d^2\beta_n(x)}{dx^2}+0-\frac{2}{w}k_n[\varphi_1\cos k_n y]_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}}-k_n^2\frac{2}{w}\int_{-\frac{w}{2}}^{+\frac{w}{2}}\varphi_1\sin k_n y\,dy$$

$$= \frac{d^2\beta_n(x)}{dx^2}-k_n^2\beta_n(x)$$

$$\therefore \frac{d^2\beta_n(x)}{dx^2}-k_n^2\beta_n(x) = 0 \tag{79}$$

このときの $\beta_n(x)$ についての二階微分方程式を解く．$\beta_n(x) = \mathrm{C}\exp(\alpha x)$ (C は任意定数) とすると，

$$\frac{\mathrm{d}^2\beta_n(x)}{\mathrm{d}x^2} = \mathrm{C}\alpha^2 e^{\alpha x} \tag{80}$$

となり，これを (79) 式に代入すると，

$$\mathrm{C}\alpha^2 e^{\alpha x}-k_n^2\mathrm{C}e^{\alpha x} = 0 \tag{81}$$

$$\alpha = \pm k_n \tag{82}$$

$-w/2 < x < \infty$ より，$\alpha = +k_n$ は解として不適である．よって，

$$\beta_n(x) = \mathrm{C}\exp(-k_n x) \tag{83}$$

また，任意定数 C は,

$$\mathrm{C} = \beta_n\left(-\frac{w}{2}\right) \tag{84}$$

よって,

$$\beta_n(x) = \beta_n\left(-\frac{w}{2}\right)\exp\left[-k_n\left(x+\frac{w}{2}\right)\right] \tag{85}$$

$x = w/2$ において，(74) 式 は，(67) 式を用いて,

$$\beta_n(x) = \frac{2}{w}\int_{-w/2}^{+w/2}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)_{x=-\frac{w}{2}}\sin(k_n y)\,\mathrm{d}y = -\frac{2}{w}\frac{2\pi\mu_0 H_z}{\phi_0}\int_{-w/2}^{+w/2} y\sin(k_n y)\mathrm{d}y \tag{86}$$

$$\left(\frac{d\beta_n}{dx}\right)_{-\frac{w}{2}} = -\frac{2}{w}\cdot\frac{2\pi\mu_0 H_z}{\phi_0}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} y\, sin k_n y\; dy$$

$$= -\frac{4\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\left\{\left[-y\frac{\cos k_n y}{k_n}\right]_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} + \int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\frac{\cos k_n y}{k_n}\; dy\right\}$$

$$= -\frac{4\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\frac{\cos k_n y\, y}{k_n}\; dy$$

$$= -\frac{4\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w k_n^2}\left[\sin k_n y\right]_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}$$

$$= -\frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w k_n^2}\; sin k_n\frac{w}{2} \qquad\qquad k_n\frac{w}{2} = \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$= -\frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w k_n^2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$= -\frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\;\frac{(-1)^{n-1}}{k_n^2}$$

$$= \frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\;\frac{(-1)^{n-2}}{k_n^2}$$

$$= \frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\;\frac{(-1)^{n}}{k_n^2}$$

$$\therefore -k_n\beta_n\left(-\frac{w}{2}\right) = \frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\frac{(-1)^n}{k_n^2} \tag{87}$$

したがって,

$$\beta_n\left(-\frac{w}{2}\right) = \frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\frac{(-1)^n}{k_n^3} \tag{88}$$

である．よって，(74) 式は以下のようになる．

$$\beta_n(x) = \frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\frac{(-1)^n}{k_n^3}\exp\left[-k_n\left(x+\frac{w}{2}\right)\right] \tag{89}$$

である．(89) 式を (73) 式に代入して，上部ストリップの位相 φ_1 および，下部ストリップの位相 φ_2 はそれぞれ

$$\varphi_1(x,y) = \frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k_n^3}\exp\left[-k_n\left(x+\frac{w}{2}\right)\right]\sin(k_n y) \tag{90}$$

$$\varphi_2(x,y) = \frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k_n^3}\exp\left[-k_n\left(\frac{w}{2}-x\right)\right]\sin(k_n y) \tag{91}$$

となる．θ_1 は，$\varphi_1(x,y)-\varphi_2(x,y)$ なので，

$$\begin{aligned}
&\frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{k_n^3}\left\{\exp\left[-k_n\left(\frac{a}{2}+x\right)\right]-\exp\left[-k_n\left(\frac{a}{2}-x\right)\right]\right\}\sin k_n y\\
&=\frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{k_n^3}\left\{e^{-\frac{k_n a}{2}}e^{-k_n x}-e^{-\frac{k_n a}{2}}e^{k_n x}\right\}\sin k_n y\\
&=\frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{k_n^3}e^{-\frac{k_n a}{2}}\left(e^{-k_n x}-e^{k_n x}\right)\sin k_n y\\
&=\frac{8\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{k_n^3}e^{-\frac{k_n a}{2}}2\cosh(k_n x)\sin k_n y\\
&=\frac{16\pi\mu_0 H_z}{\phi_0 w}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{k_n^3}e^{-\frac{k_n a}{2}}\cosh(k_n x)\sin k_n y
\end{aligned}$$

$$\theta_1(x,y) = \frac{16\pi\mu_0 \Phi_z}{\phi_0 w}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{k_n^3}e^{-\frac{k_n L}{2}}\cosh(k_n x)\sin(k_n y) \tag{92}$$

垂直磁場中で $\theta_1(x,y)$ は，(92) 式 のようになり，3 次元斜め磁場中では，(29) 式になる．

第 4 章 結果と考察

4.1 等高線プロットの見方について

本解析では，斜め磁場中での直流臨界電流 I_c の変化の様子を等高線プロットであらわした．このプロットを用いて結果を示した例は，他の論文でもほとんど見られないため，この項では図 4.1 (a), (b) を用いて等高線プロットの見方について説明する．図 4.1(a) は，十字型接合について，2 次元斜め磁場中の I_c 大きさを等高線プロットした結果である．横軸の Φ_x / ϕ_0 は，接合面に対して平行な磁束を磁束量子で ϕ_0 で規格化したもので，同様に，縦軸の Φ_z / ϕ_0 は，接合面に対して垂直な磁束を ϕ_0 で規格化したものである．カラーレンジは，I_c の大きさをあらわしており，(46) 式 によって導かれる．白色に近いほど大きい値の I_c，黒色に近いほど小さい値の I_c をあらわしている．

図 4.1 (a) は，図 4.1 (b) に示した 1 次元磁場中での直流臨界電流の磁場依存性のグラフと対応している．図 4.1 (a) に示している青いラインは，Φ_x のみを印加した時の I_c の変化をあらわし，橙色のラインは，接合面に対して Φ_z のみを印加した時の I_c の変化をあらわしている．図 4.1 (a) に示したグラフの色と図 4.1 (b) のラインの色はそれぞれ対応している．

図 4.1 (a) の青いラインに注目すると Φ_x が変化することによって，カラーレンジが変化していることが分かる．これが直流臨界電流の磁気干渉をあらわしており，図 4.1 (b) で示されるような Fraunhofer pattern が見られる．一方で，図 4.1 (a) の橙色のライン上では，Φ_z の変化によるカラーレンジの変化は見られない．この場合，図 4.1 (b) に示したように磁気干渉は発生しておらず，Φ_z の増加によって，I_c が単調に減少していることをあらわす．以上が等高線プロットの見方の説明である．

(a) (b)

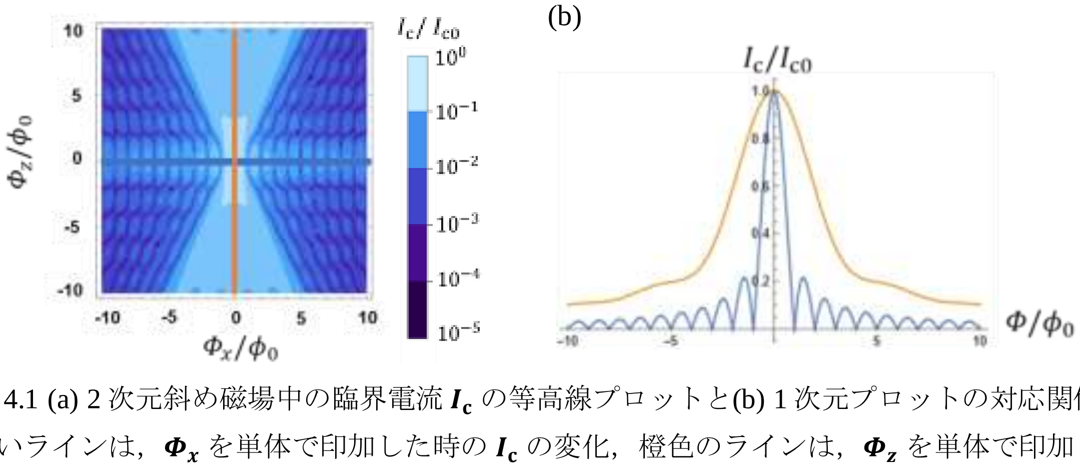


図 4.1 (a) 2 次元斜め磁場中の臨界電流 $\boldsymbol{I_c}$ の等高線プロットと(b) 1 次元プロットの対応関係．青いラインは，$\boldsymbol{\Phi_x}$ を単体で印加した時の $\boldsymbol{I_c}$ の変化，橙色のラインは，$\boldsymbol{\Phi_z}$ を単体で印加した時の $\boldsymbol{I_c}$ の変化.

4.2 十字型接合

4.2.1 2 次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉

図 4.2 (a) ~ (g) は，十字型接合について，2 次元斜め磁場中 ($\Phi_y = 0$) の直流臨界電流の大きさを等高線プロットした結果である．また，図 4.3 (a) ~ (g) について，青いラインで描いたプロットは，Φ_x を単体で印加したときの I_c の変化，橙色のラインで描いたプロットは，Φ_z を単体で印加したときの I_c の変化をそれぞれあらわしている．図 4.2 (a) ~ (g) について，図 4.1 (a) と同様に，横軸はΦ_x / ϕ_0，縦軸は Φ_z / ϕ_0で，カラーレンジは，図 4.1 (a) と同様のものである．なお，図 4.2 (a) は接合面内の臨界電流密度J_c が均一な場合，図 4.2 (b) ~(e) は，J_c が不均一で，不均一な領域の形状が正方形 ($x_0 = y_0$) の場合，図 4.2 (f) ~ (g) は，J_c が不均一で，不均一な領域の形状が長方形 ($x_0 \neq y_0$) の場合の結果である．結果全体から分かることとしては，臨界電流密度 J_c の分布の違いによって，直流臨界電流の磁気干渉が大きく異なることが分かる．J_c が均一な場合 (図 4.2 (a))，Φ_z / ϕ_0 の線に沿ってカラーレンジが変化していないことから，垂直磁場下では磁気干渉が発生しないことがわかる．また，$2\,|\Phi_z| > |\Phi_x|$ の範囲においてもカラーレンジの変化がないことから，この範囲の斜め磁場下では磁気干渉は発生しない．一方，不均一な J_c の場合(図 4.2.1 (b), (c), (d))，x_0, y_0が大きくなることで，垂直磁場中及び$2\,|\Phi_z| > |\Phi_x|$ の範囲でも，I_c の変化が顕著にあらわれるようになる．特に，$(x_0, y_0) = (0.4, 0.4)$ のとき，垂直磁場中でのカラーレンジの変化が顕著に見られ，1 次元プロット (図 4.3(e)) においても磁気干渉が見られる．これが均一な J_c と不均質な J_c の決定的な違いであると言える．

また、横軸を Φ_y / ϕ_0 に置き換えたとき (図 4.4 (a) ~ (g)) ，図 4.4 (a) ~(e) は,図 4.2 (a) ~(d) と一致するが，図 4.4 (f), (g) は，図 4.2 (f), (g) の結果とは異なる．これは，$x_0 \neq y_0$ より，鎖交する磁束の量が x 方向，y 方向でそれぞれ異なるためである．

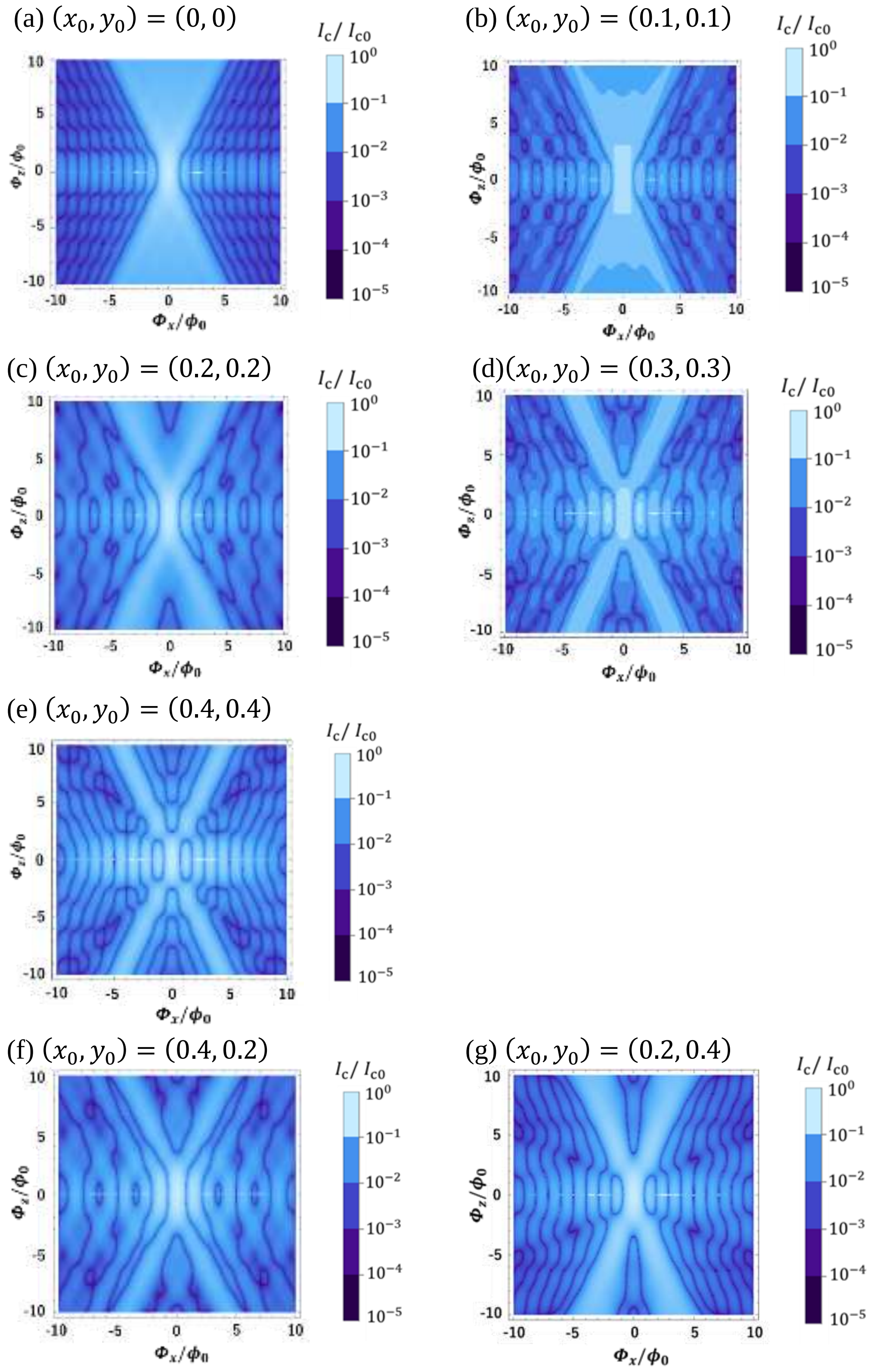
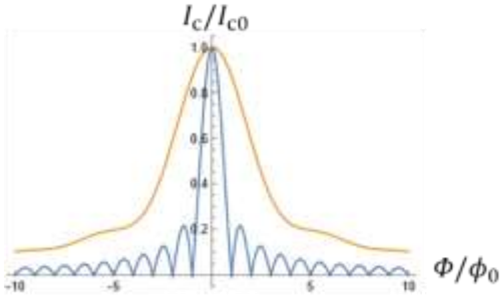
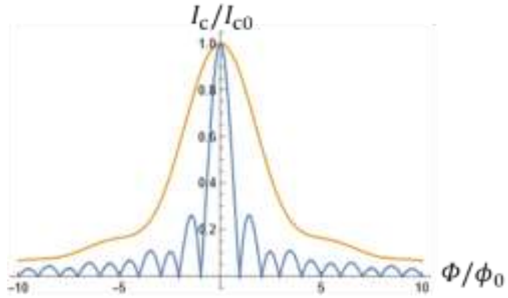


図 4.2 2 次元斜め磁場中 ($\boldsymbol{\Phi_y = 0}$) の臨界電流の $\boldsymbol{I_c}$ の磁気干渉。(a) は接合面内の臨界電流密度 $\boldsymbol{J_c}$ が均一な場合，(b) ~ (g) は $\boldsymbol{J_c}$ が不均一な場合.

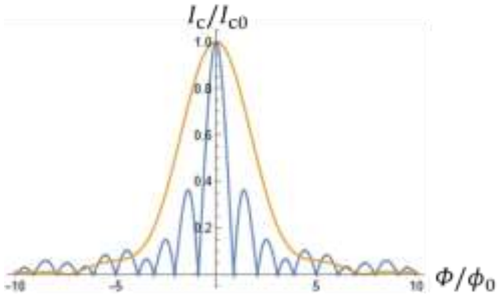
(a) $(x_0, y_0) = (0, 0)$



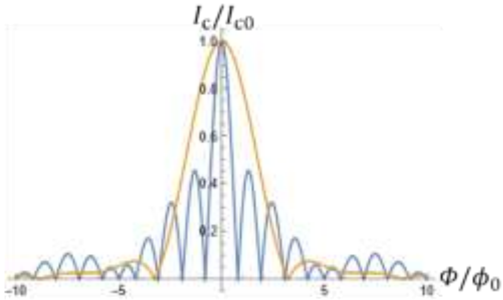
(b) $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$



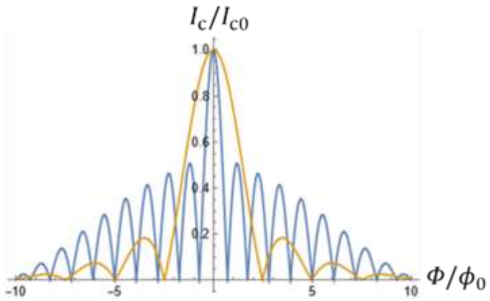
(c) $(x_0, y_0) = (0.2, 0.2)$



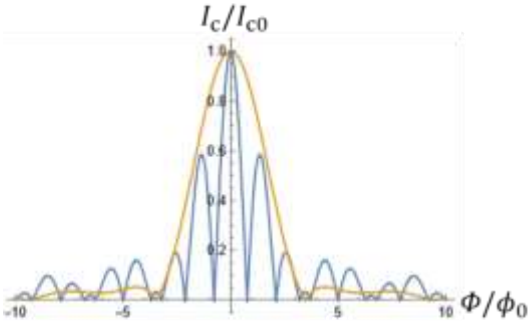
(d) $(x_0, y_0) = (0.3, 0.3)$



(e) $(x_0, y_0) = (0.4, 0.4)$



(f) $(x_0, y_0) = (0.4, 0.2)$



(g) $(x_0, y_0) = (0.2, 0.4)$

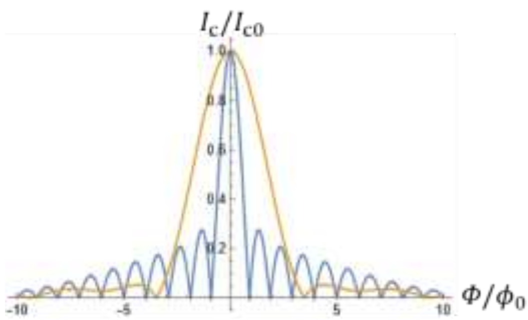


図 4.3 接合面に磁場を印加した時の臨界電流 $\boldsymbol{I_c}$ の磁場依存性．縦軸は直流臨界電流の大きさ，横軸は磁場．青色のプロットは接合面に対して平行な磁場、橙色のプロットは接合面に対して垂直磁場な磁場を印加したときの $\boldsymbol{I_c}$ の変化をあらわしている．

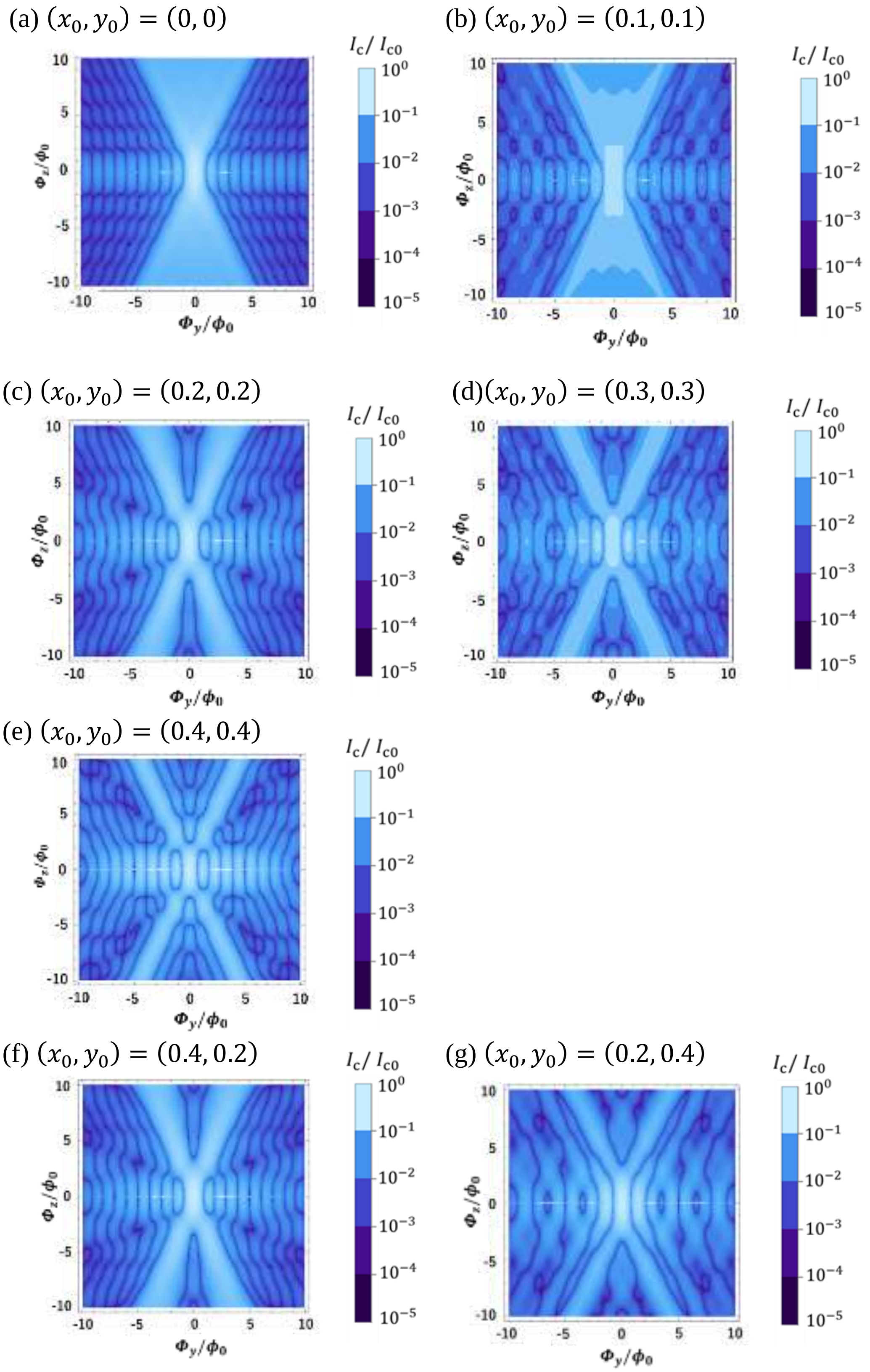


図 4.4 2 次元斜め磁場中 ($\boldsymbol{\Phi_x = 0}$) の直流臨界電流の磁気干渉．(a) は接合面内の臨界電流密度 $\boldsymbol{J_c}$ が均一な場合，(b) ~ (g) は $\boldsymbol{J_c}$ が不均一な場合．

4.2.2 3 次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉

図 4.5 (a), (b), (c), (d) は， 3 次元斜め磁場下での直流臨界電流の磁気干渉を示したものである．図 4.4 (a) は， $(x_0, y_0) = (0, 0)$， 図 4.4 (b) は， $(x_0, y_0) = (0.4, 0.4)$， 図 4.4 (c) は， $(x_0, y_0) = (0.4, 0.2)$， 図 4.4 (d) は $(x_0, y_0) = (0.2, 0.4)$ のモデルである．横軸 Φ_x / ϕ_0 ， 縦軸 Φ_y/ ϕ_0 は，それぞれ接合面に対して平行な磁束である．カラーレンジは，図 4.1 (a) のものと同じである．垂直磁場 Φ_z / ϕ_0 は，定数として計算を行った．Φ_z / ϕ_0 は，0.5 刻みで，Φ_z / $\phi_0 = 0 \sim 10$ まで計算をおこなった．この結果については(48) 式を用いた．

結果全体から、磁気干渉は 臨界電流密度 J_c のない領域の範囲に基づいて大幅に変化することが明らかである．3 また，図 4.5 (c) を90° 回転させると 図 4.5 (d) と一致する．

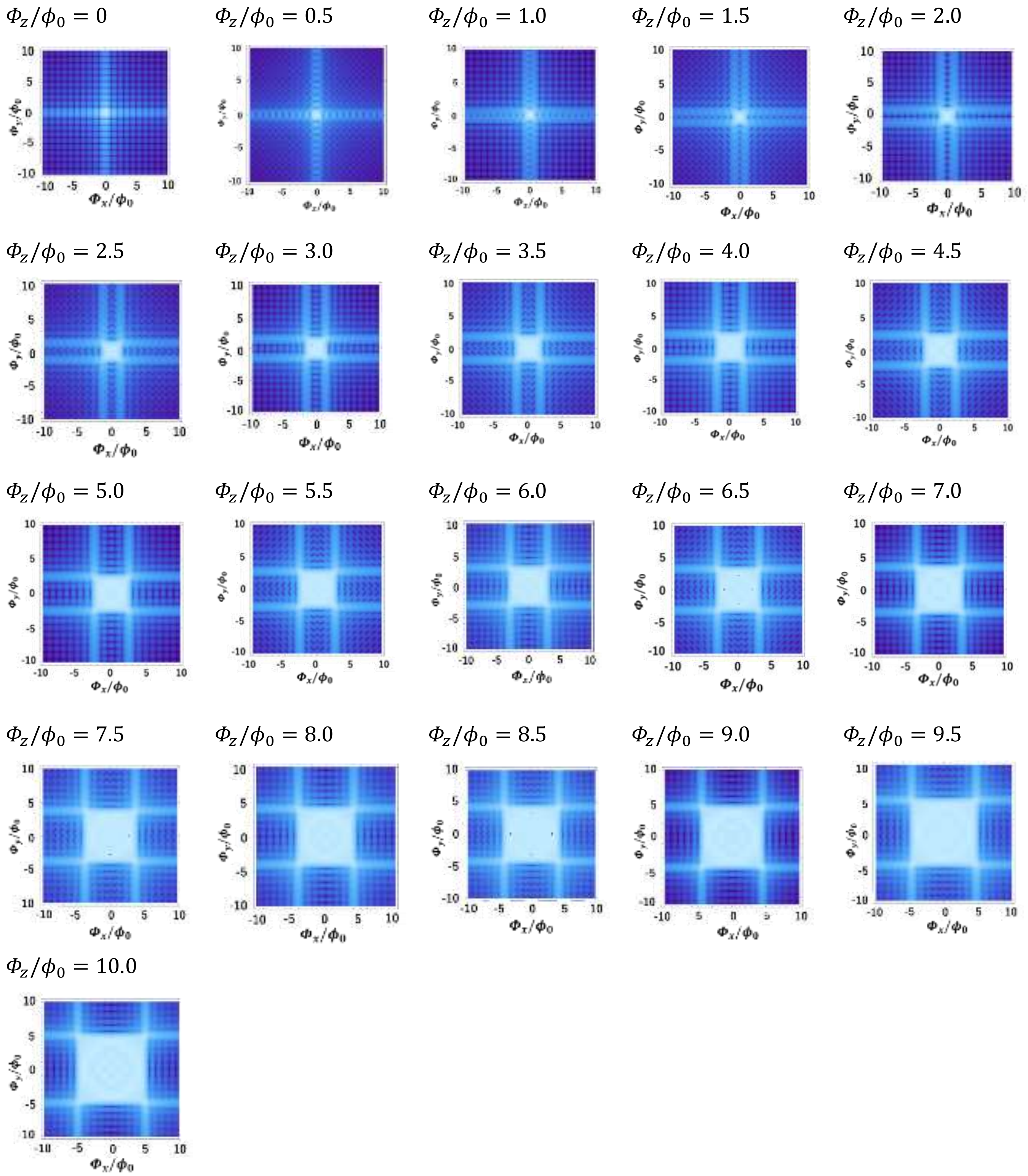


図 4.5 (a) 十字型接合の 3 次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉 $((\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}))$.

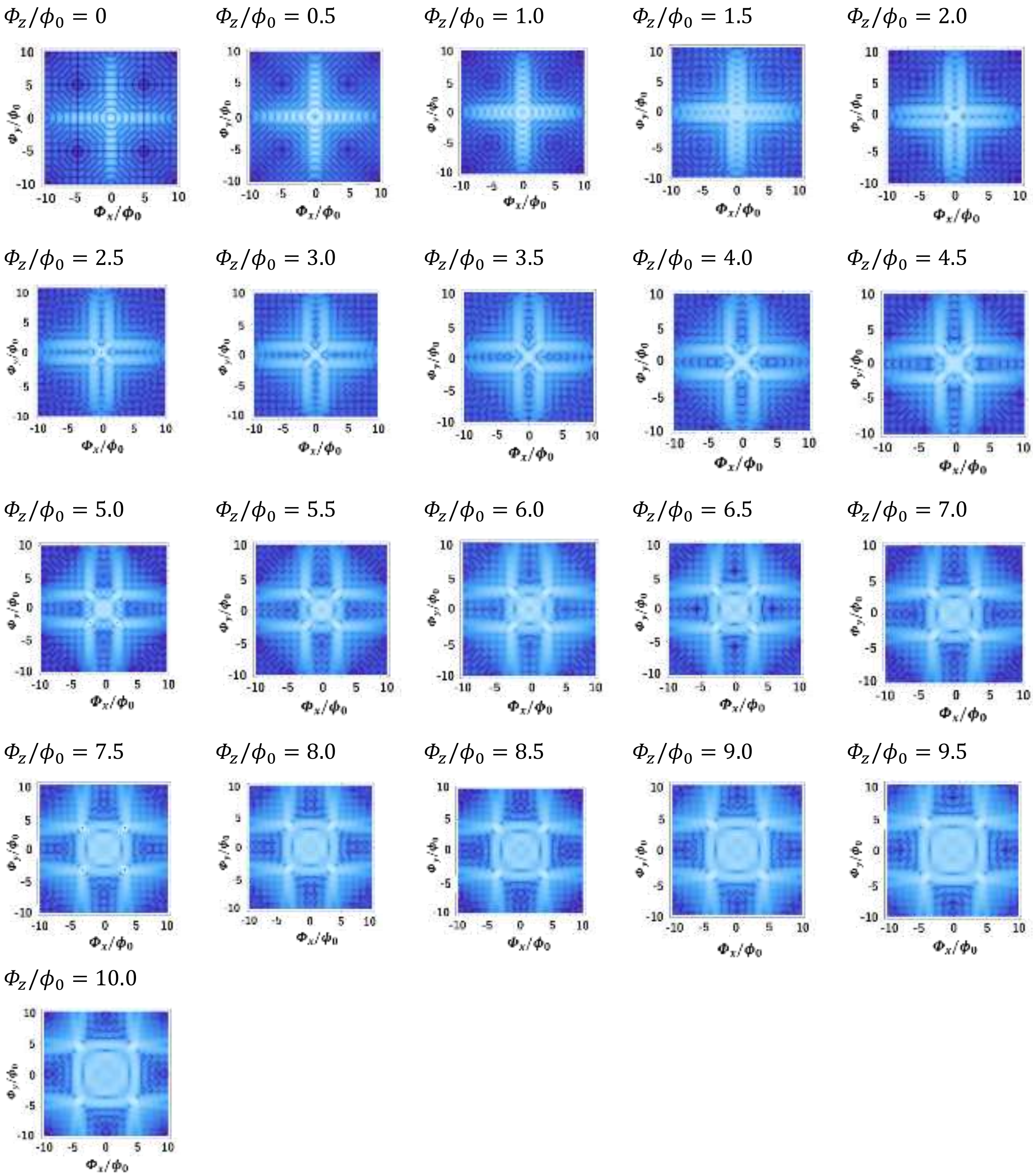


図 4.5 (b) 十字型接合の 3 次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉 ($(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\mathbf{0.4}, \mathbf{0.4})$).

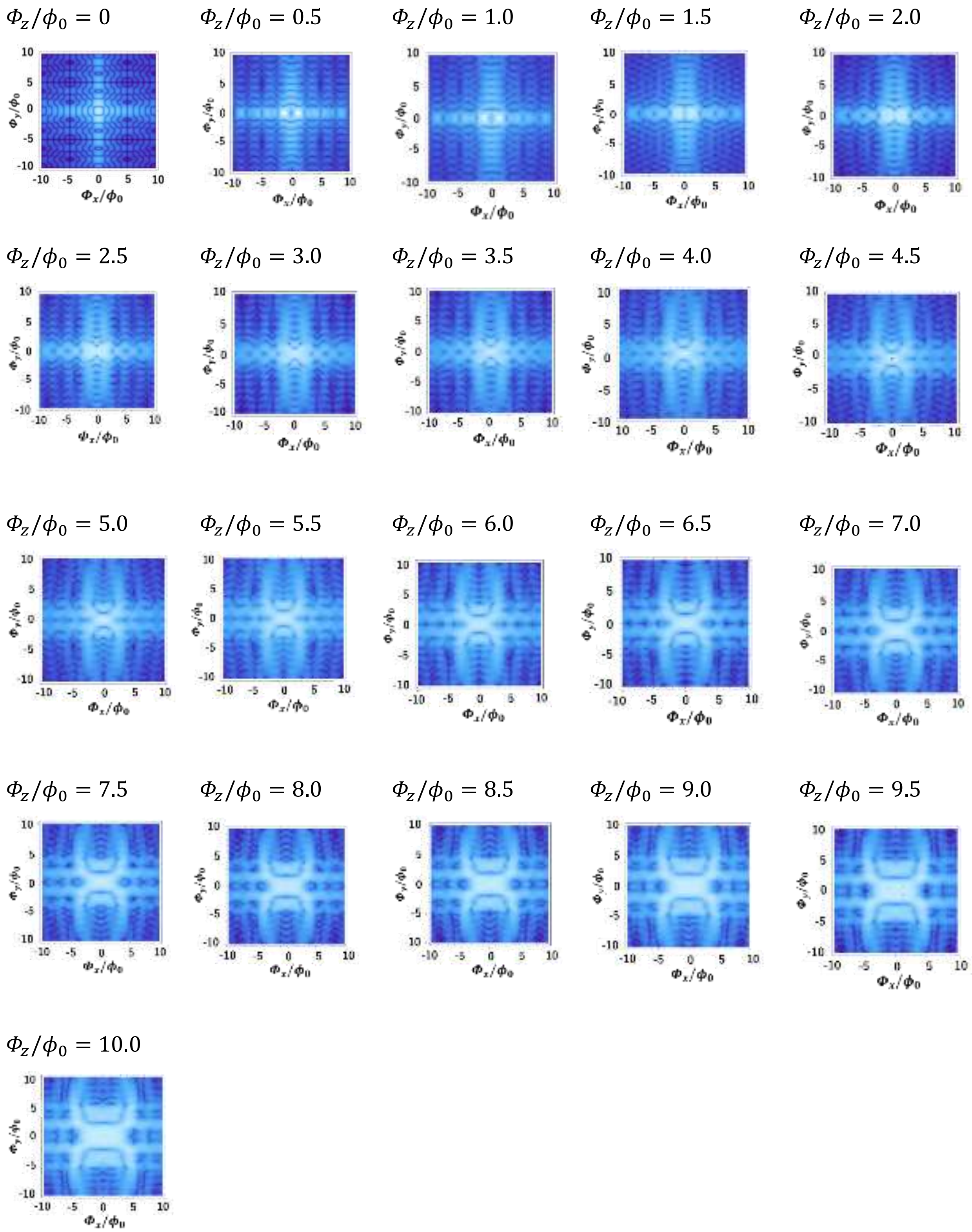


図 4.5 (c) 十字型接合の 3 次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉 ($(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\mathbf{0.4}, \mathbf{0.2})$).

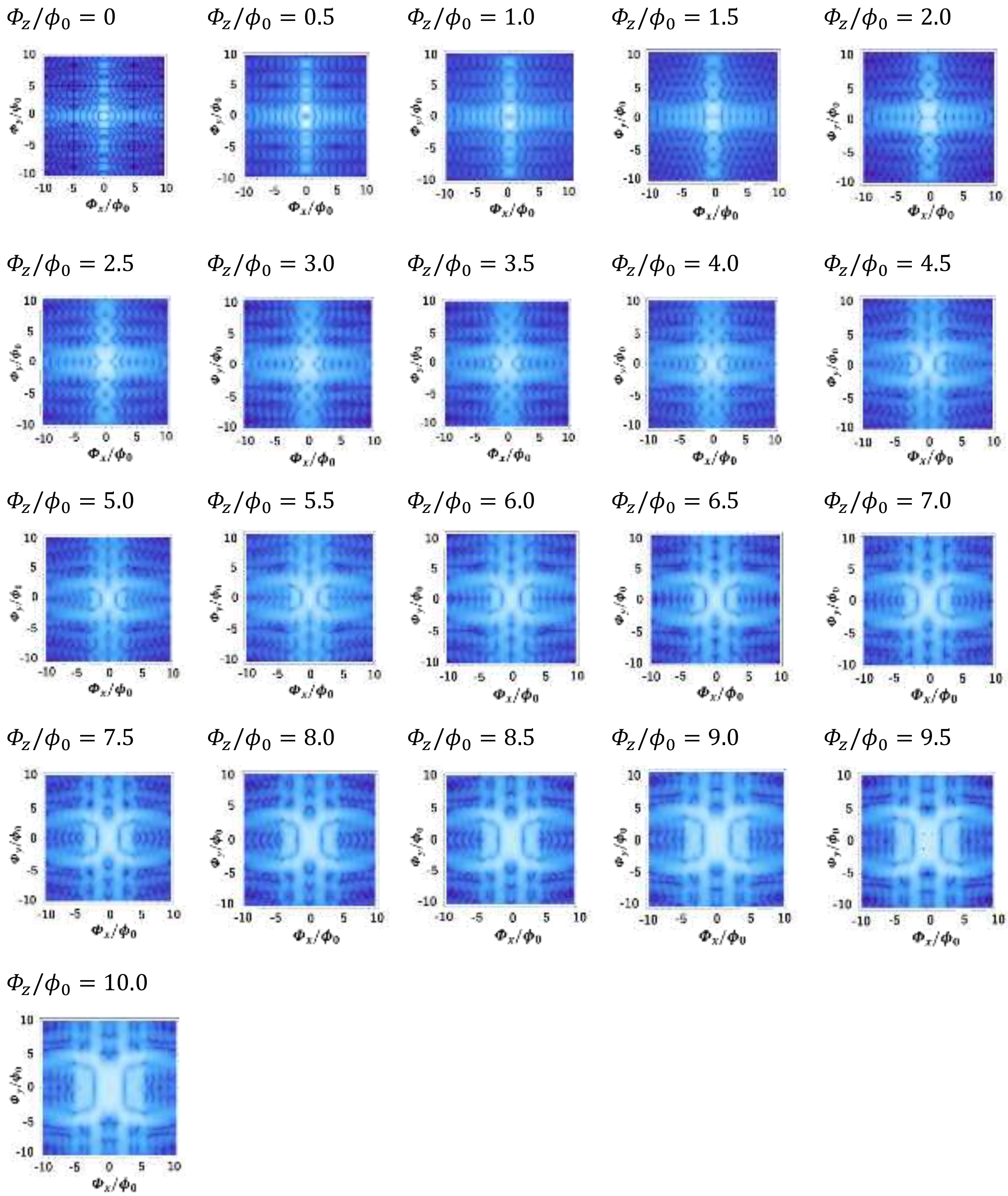


図 4.5 (d) 十字型接合の 3 次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉 $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\mathbf{0.2}, \mathbf{0.4})$.

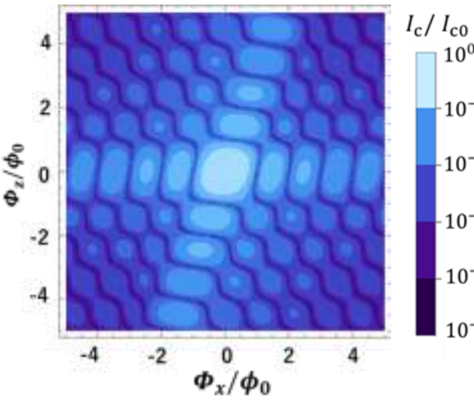
4.3 オーバーラップ接合

4.3.1 2次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉

図 4.6 (a), (b) は，臨界電流密度 J_c が均一なときのオーバーラップ接合の 2 次元斜め磁場中の直流臨界電流 I_c を等高線プロットした結果を示している．カラーレンジが示す値は十字型接合の計算で使用したものと同様である．この結果については，(42) 式を用いた．

図 4.6 (a) は，横軸を Φ_x/ϕ_0，縦軸を Φ_z/ϕ_0，図 4.6 (b) は，横軸を Φ_y/ϕ_0， 縦軸を Φ_z/ϕ_0 としている．十字型接合と異なり，Φ_x と Φ_z で構成される斜め磁場と Φ_y と Φ_z で構成される斜め磁場で磁気干渉が大きく異なっている．特に $-1 < \Phi_y < 0$ の範囲では磁気干渉が生じていない．この理由について，本研究からは得られなかった．

(a) (b)



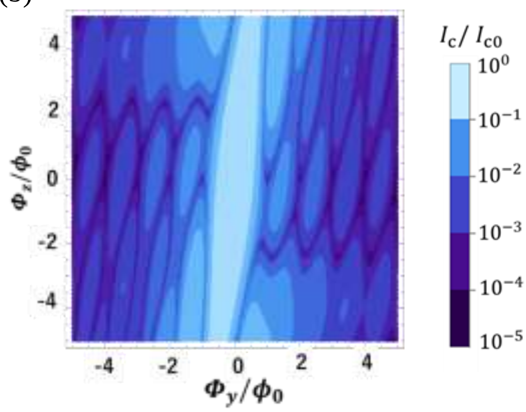


図 4.6 オーバーラップ接合の 2 次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉．(a) は横軸が $\boldsymbol{\Phi_x/\phi_0}$，縦軸が $\boldsymbol{\Phi_z/\phi_0}$．(b) は横軸が $\boldsymbol{\Phi_y/\phi_0}$，縦軸が $\boldsymbol{\Phi_z/\phi_0}$.

4.3.2 3次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉

図 4.7 は，オーバーラップ接合において、横軸を Φ_x/ϕ_0 および 縦軸を Φ_y/ϕ_0 とし，直流臨界電流 I_c を等高線プロットした結果を示している．図 4.7 (a-1), (a-2) は，$(x_0, y_0) = (0, 0)$，図 4.7 (b-1), (b-2) は，$(x_0, y_0) = (0.4, 0.4)$，図 4.7 (c-1), (c-2) は，$(x_0, y_0) = (0.4, 0.2)$，図 4.7 (d-1), (d-2) は，$(x_0, y_0) = (0.2, 0.4)$ の時の結果であり、また、図 4.6 (a-1), (b-1), (c-1), (d-1) は，接合面に垂直磁場が印加されていない時 ($\Phi_z/\phi_0 = 0$)，図 4.6 (a-2), (b-2), (c-2), (d-2) は，垂直磁場が接合面に印加された時 ($\Phi_z/\phi_0 = 4$) の結果である．カラーレンジが示す値は十字型接合の計算で使用したものと同様である．この結果については，(42) 式を用いた．

結果全体から分かることとして，Φ_z が接合面内に存在していないときは， Φ_x および Φ_y の正負に関して対称的になっているが，Φ_z が加わるとその対称性が破れ，臨界電流のピークが Φ_x の正方向に移動することが分かる．また，臨界電流密度 J_c の違いによって，I_c の磁気干渉は異なっているものの十字型接合のような垂直磁場中での大きな変化は見られないことが分かる (図 4.8).

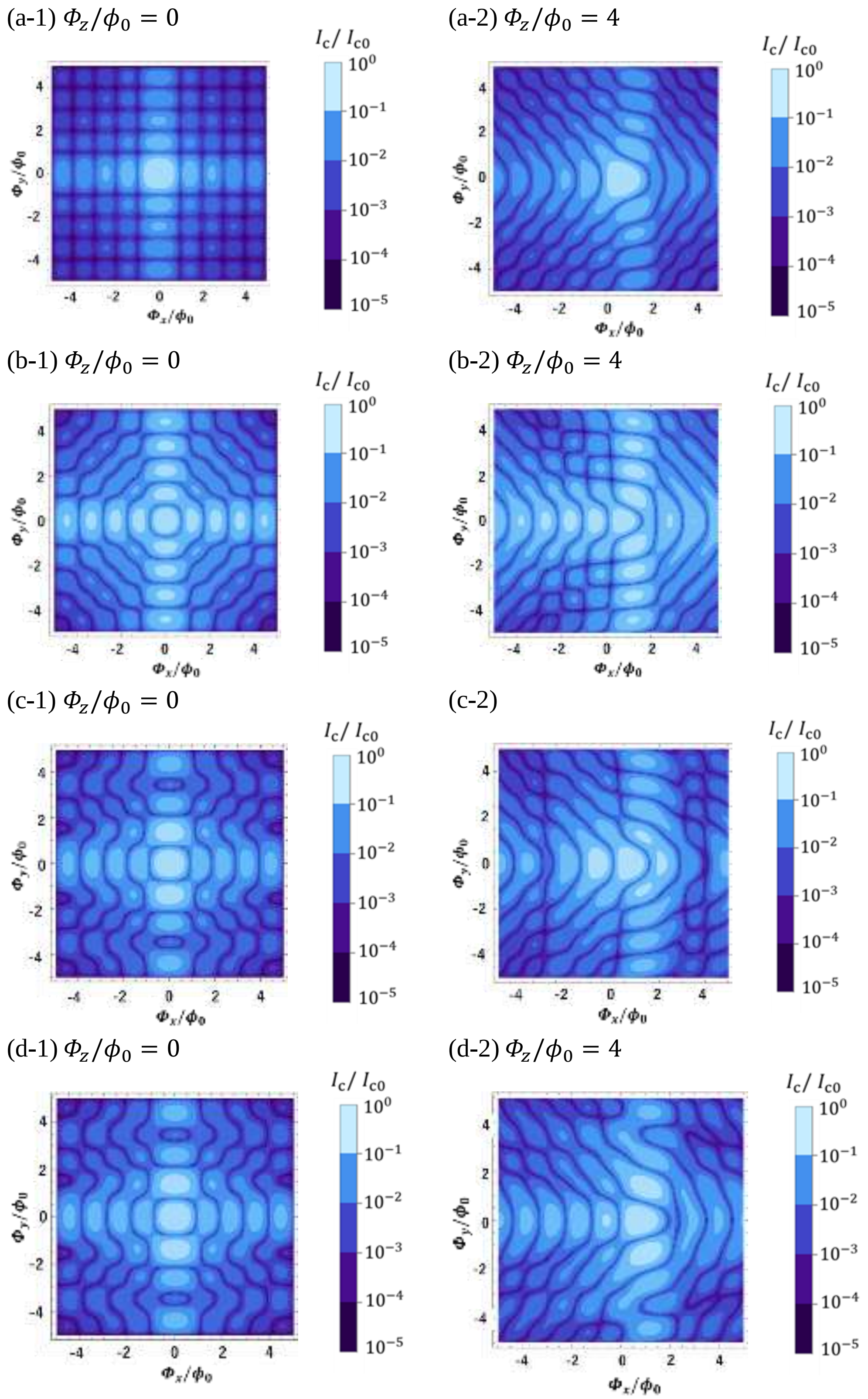


図 4.7 オーバーラップ接合の 3 次元斜め磁場中の直流臨界電流の磁気干渉．(a-1)，(a-2) は $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$，(b-1) ~ (b-2) は$(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\mathbf{0.4}, \mathbf{0.4})$，(c-1) ~ (c-2) は$(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\mathbf{0.4}, \mathbf{0.2})$，(d-1) ~ (d-4) は$(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0}) = (\mathbf{0.2}, \mathbf{0.4})$.

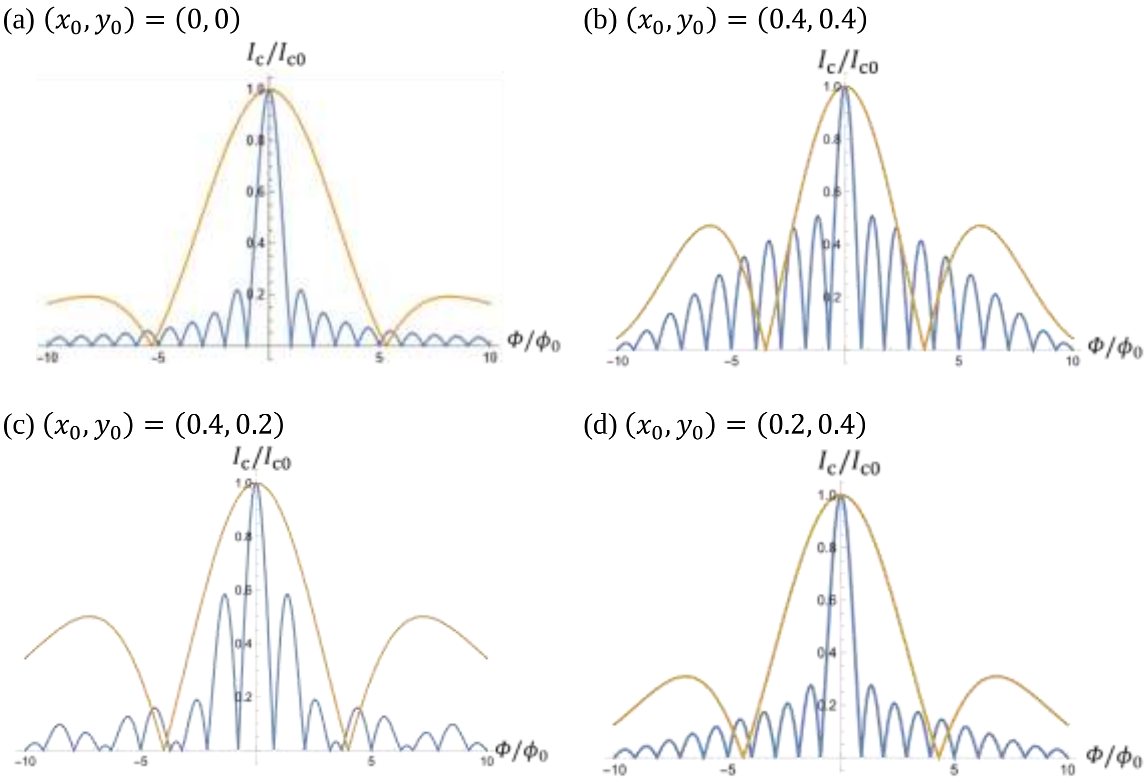


図 4.8 接合面に磁場を印加した時の臨界電流 $\boldsymbol{I_c}$ の磁場依存性．縦軸は直流臨界電流の大きさ，横軸は磁場．青色のプロットは接合面に対して平行な磁場，橙色のプロットは接合面に対して垂直磁場な磁場を印加したときの $\boldsymbol{I_c}$ の変化をあらわしている．

4.4 考察

4.4.1 電流分布の結果の見方

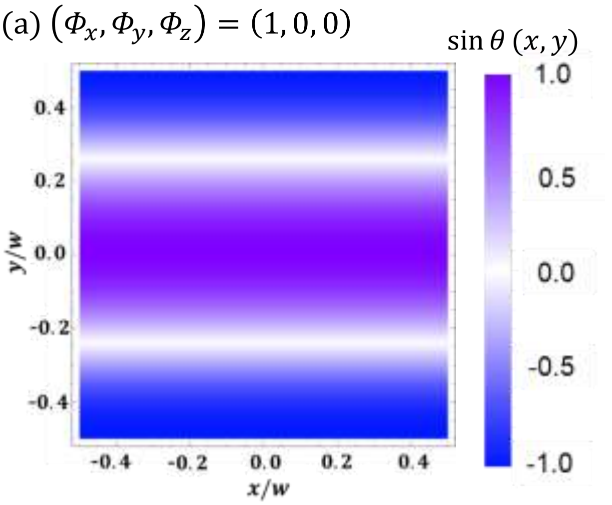
本節では，接合面内の電流分布を計算した結果を用いて，直流臨界電流の磁気干渉が生じる理由について説明する．

電流分布は， $\sin\theta\,(x,y) = J_z(x,y)\,/\,J_{c0}$ であらわされる． J_{c0} は，ゼロ磁場での臨界電流密度である．図 4.9 (a) について，横軸，縦軸はそれぞれ接合のスケールである．カラーレンジは，紫色は z 軸の正の方向に沿って流れる電流を示しており，青色は z 軸の負の方向に沿って流れる電流を示している． 紫色と青色の総和が接合面内の臨界電流 I_{c} に対応している．

図 4.9 (a) は，Φ_x を単体で印加した時の接合面内の電流分布で，$\Phi_x = 1$ としている．この電流分布は右側の 1 次元プロットの丸で囲った部分と対応している．紫色と青色の割合が等しい場合は，1 次元プロットにおいて，$I_{\mathrm{c}} = 0$ となり，割合が異なる場合は，$I_{\mathrm{c}} > 0$ となる．$\Phi_x = 1$ のとき，電流分布において，紫色と青色の割合が等しくなっているため，$I_{\mathrm{c}} = 0$ となっており，図 4.9 (b) からも確認することができる．

この図から分かることとして，Φ_x, Φ_y, Φ_z の各々の磁場によって，接合面内の I_{c} がどのように変調されているかを可視化することができる．ここでいう変調とは電流の向きが周期的に変わること，すなわち紫色と青色が一定の周期で変化することをあらわす．これにより，接合形状や臨界電流密度 J_{c} の違いによって磁気干渉が異なる理由を説明することが可能となる．下の図においては，Φ_x が印加されると，接合面の y 方向に沿って，電流が変調されることが分かる．外部磁場に対して垂直な方向に電流は変調されるため，図 4.9 (a) の結果は正しいといえる．また，実験でもこのようになることが確かめられている [16]．

(a) $(\Phi_x, \Phi_y, \Phi_z) = (1,0,0)$



(b)

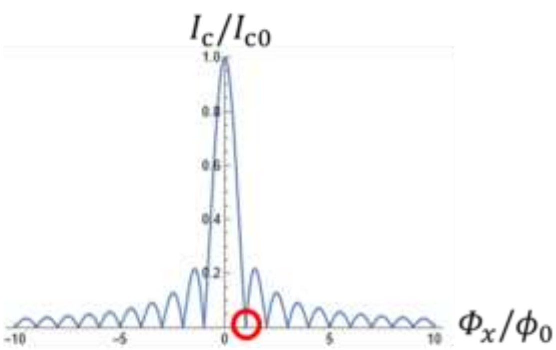


図 4.9 (a) $\boldsymbol{\Phi_x}$ を印加した時の接合面内の電流分布．(b) 1 次元プロットにおいて赤丸で囲った部分は $\boldsymbol{\Phi_x = 1}$ の時の $\boldsymbol{I_{\mathrm{c}}}$ の値．

4.4.2 十字型接合

臨界電流密度J_cが不均一な場合，十字型接合において垂直磁場中においても直流臨界電流の磁気干渉が生じた理由について説明する．図 4.10 (a), (b) は、垂直磁場を単体で印加した時の接合面を流れる電流を示している．図 4.10 (a) は，臨界電流密度 J_c が均一な場合 $\big((x_0, y_0) = (0, 0)\big)$，図 4.10 (b) は，$J_\mathrm{c}$ が不均一な場合に対応している $\big((x_0, y_0) = (0.4, 0.4)\big)$.

図 4.10 (a), (b)ともに，垂直磁場中で接合面の四隅付近を流れる電流が変調されていることが分かる．しかし，図 4.10 (a) において，接合面の中央周辺では変調が見られず, その領域は広く維持されている．J_c が均一な場合，Φ_z/ϕ_0 の増加によって、I_c は減少していくが，$I_\mathrm{c} = 0$ にはならないため，垂直磁場下では磁気干渉は発生しない．この結果から，中央付近で$J_\mathrm{c} = 0$ になることで 4 隅付近の変調される部分のみが残るため, x_0, y_0 が大きくなれば，垂直磁場中での磁気干渉が生じることが考えられる． 図 4.10 (b) では 4 隅付近の変調のみが残っており，紫色と青色の割合が等しくなっているため, 磁気干渉が生じている.

一方，J_c が接合領域の中央部にのみ分布している場合，磁気干渉はJ_c が均一な場合と同様になる．このモデルは、J_c が均一に分布したモデルを縮小したものと等価であるため，このモデルでは垂直磁場下では磁気干渉は発生しない.

垂直磁場が接合面の 4 隅を変調する理由は以下のように考えることができる．①上部の超伝導ストリップの遮蔽電流によって垂直磁場は直進できないため，接合面の 4 隅から侵入する．②接合面内に侵入した磁場は，エネルギーの消費を抑えるため，直ちに接合面を抜け，上部の超伝導ストリップを避けるようにして移動する (図 4.11). よって，垂直磁場は接合面の 4 隅を変調すると考えることができる.

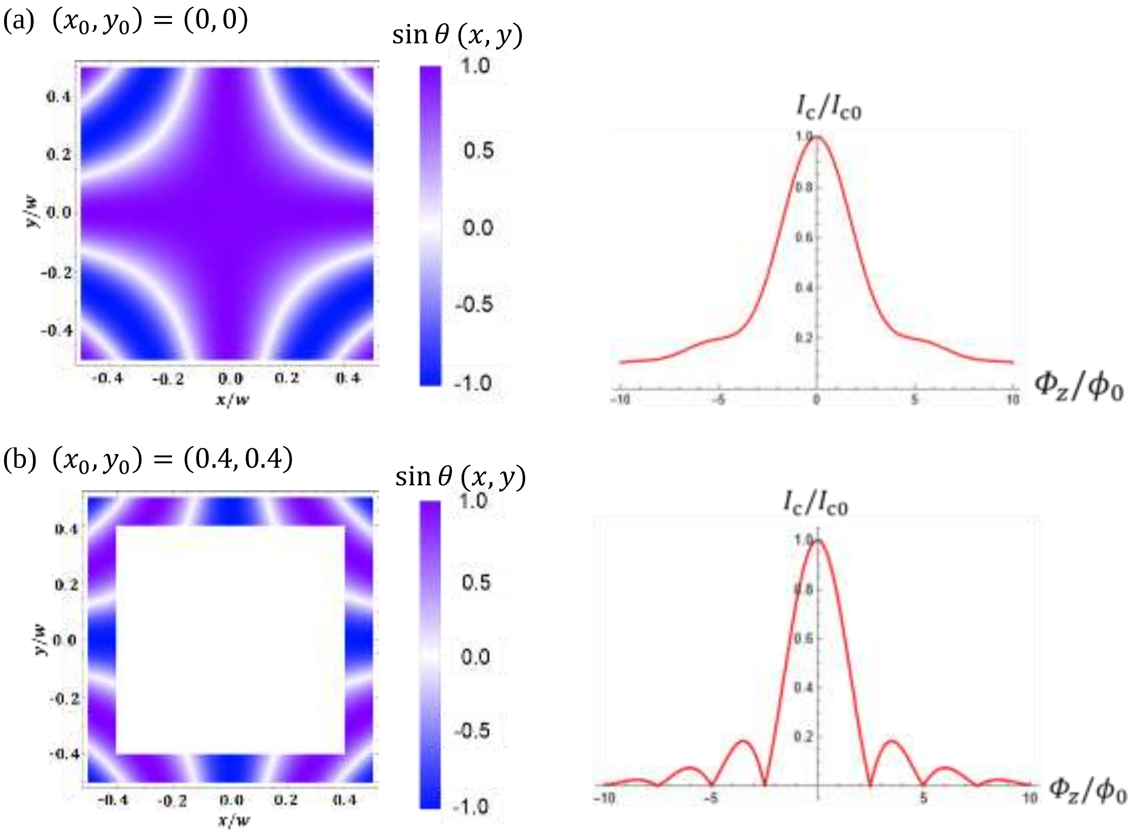


図 4.10 垂直磁場中の十字型接合の接合面内の電流分布．(a) 接合面内の $\boldsymbol{J}_\mathbf{c}$ が均一な場合．(b) 接合面内の $\boldsymbol{J}_\mathbf{c}$ が不均一な場合．

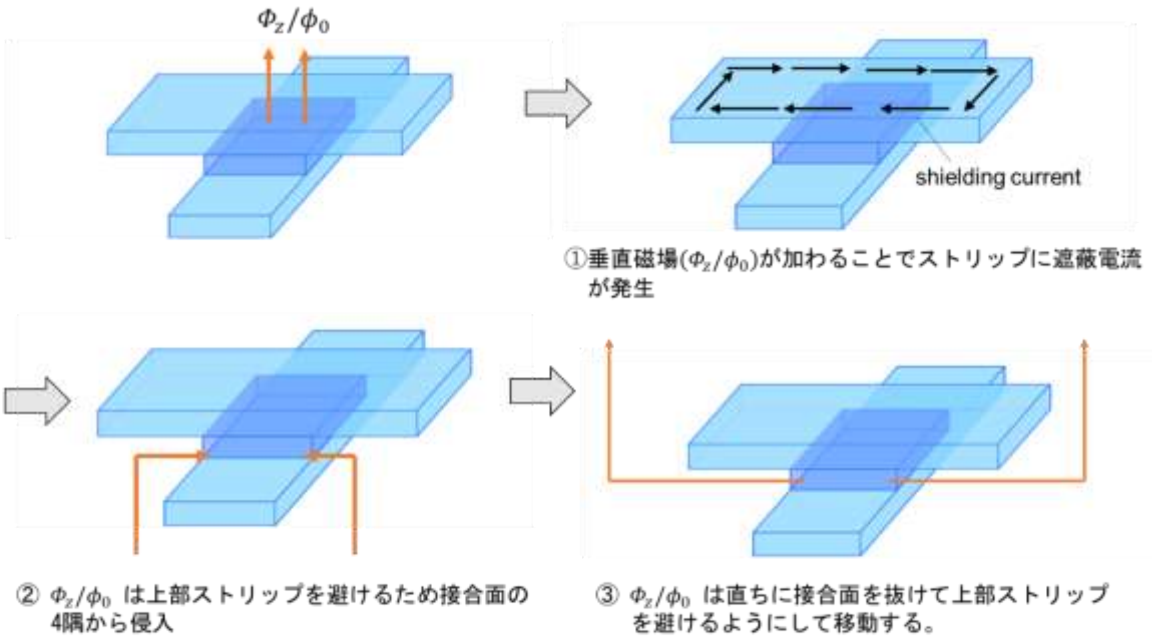


図 4.11 十字型接合における垂直磁場が進む経路．

4.4.3 オーバーラップ接合

一方，オーバーラップ接合では 臨界電流密度 J_{c} の分布 によらず，垂直磁場中で Fraunhoffer pattern が生じる (図 4.12(a), (b))．十字型接合と同様，垂直磁場は接合面の 4 隅付近を変調している．接合の中央の部分は色の変化は見られないが、接合面内の外側になるにつれて正の$\sin\theta\,(x,y)$ の値が減少していることが分かる．従って，オーバーラップ接合における垂直磁場が進む経路は十字型接合の場合と異なると考えられる．

オーバーラップ接合における垂直磁場が進む経路については以下のようになる．①垂直磁場が加わることによってストリップに遮蔽電流が発生する．②この時，磁場は上側にある超伝導ストリップを避けて接合面内に侵入していくと考えられる．③そのため，遮蔽電流によって負の方向の Φ_x/ϕ_0 が発生すると考えられ，正の方向の Φ_x/ϕ_0 が打ち消される (図 4.13)．以上の理由から，電流のピークが Φ_x/ϕ_0 の正方向に移動したと考えることができる．

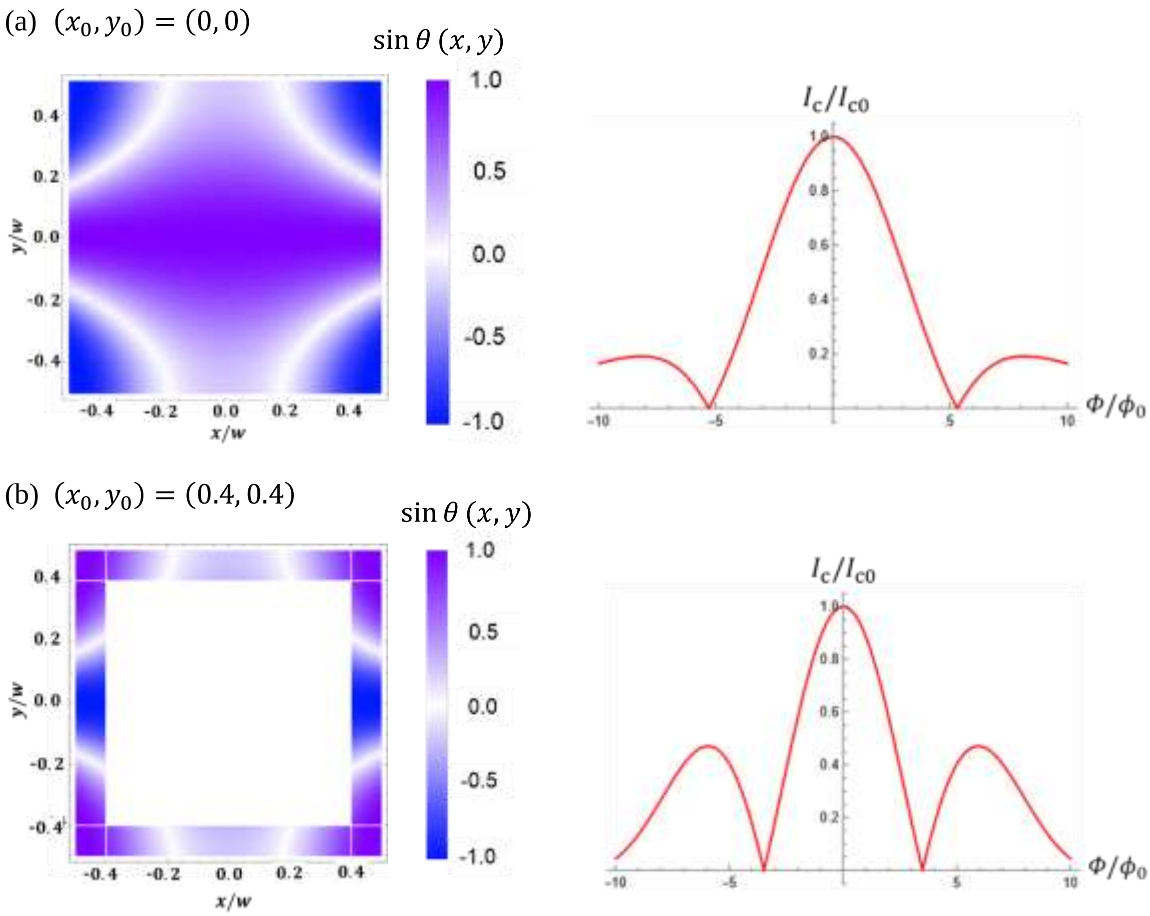


図 4.12　垂直磁場中のオーバーラップ接合の接合面内の電流分布．(a) 接合面内の J_c が均一な場合．(b) 接合面内の J_c が不均一な場合．

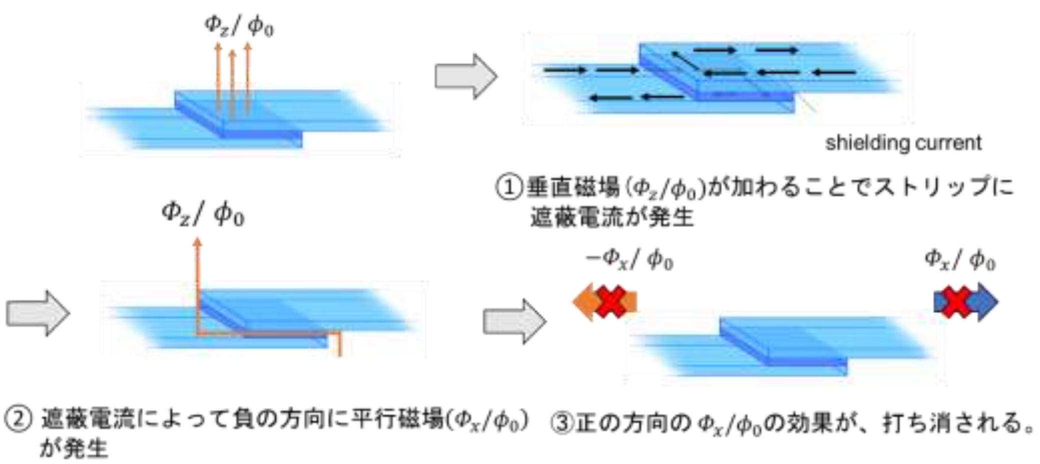


図 4.13 十字型接合における垂直磁場が進む経路.

第 5 章 結論

本論文では，接合形状及び臨界電流密度 J_{c} 分布の違いによる 2 次元及び 3 次元斜め磁場中での直流臨界電流の磁気干渉について理論解析を行った．接合形状は十字型接合とオーバーラップ接合の 2 つに着目し，臨界電流密度の分布については，接合面内に均一に分布している場合と接合面内の外側にのみ分布している場合を考えた．

十字型接合では、J_{c} 分布の違いによって，垂直磁場，及び斜め磁場中での直流臨界電流の磁気干渉が大きく異なる．これは，垂直磁場が接合面の 4 隅を変調することに起因している．J_{c} が均一な場合，接合面の中央付近の領域は変調されず，その範囲を広く維持しているため，結果として垂直磁場中で磁気干渉が生じない．一方で，外側にのみ J_{c} が分布している場合は，変調される部分のみが残るため，垂直磁場中でも磁気干渉が発生する．これにより，2 次元斜め磁場中での磁気干渉において，J_{c} が均一な場合には見られなかった $2\,|\Phi_z| > |\Phi_x|$ の範囲の斜め磁場中での磁気干渉も見られるようになった．

オーバーラップ接合における直流臨界電流の磁気干渉は，J_{c} 分布の違いによって，十字型接合ほどの大きな変化は見られなかった．こちらも垂直磁場によって接合面の 4 隅が変調されるが，接合面内に侵入したあとの経路は十字型接合とは異なり，接合面の x 軸方向に沿って進んでいくことが電流分布の結果から推測される．

本計算で，十字型接合とオーバーラップ接合が共に，斜め磁場中で、直流臨界電流の磁気干渉が生じることが分かった。特に十字型接合では，J_{c} が外側にのみに分布している場合は，J_{c} が均一に分布している場合よりも，広い範囲の斜め磁場で磁気干渉がみられる．この成果は、1 つの SQUID で，複数の方向成分を含んだ非常に小さい磁場を検出できることを示唆しており，資源探査の促進や医療分野への応用が期待できる．

研究業績

国内学会

1. 原岡壮馬、上田天馬、小田部荘司、馬渡康徳：第 70 回応用物理学会春季学術講演会 17p-D209-1、3 月 15 日 - 3 月 18 日、オンライン

2. 原岡壮馬、小田部荘司、馬渡康徳：第 84 回応用物理学会春季学術講演会、21p-B202-5、9 月 19 日- 9 月 23 日、口頭発表

国際学会

1. Soma Haraoka, Edmund Soji Otabe, Yasunori Mawatari, The 36th International Symposium on Superconductivity (ISS2023), ED5-3, November 28 - November 30, 2023,Takina, Wellington, New Zealand

参考文献

1) A. Barone and G. Paterno, Physics and Applications of the Josephson Effect (Wiley, New York, 1982)
2) R. C. Jaklevic et al, *Phys. Rev. Lett.* 12, 159 (1964).
3) J. Clarke, Proc. *IEEE*, 77, 1208 (1989).
4) Y. Makhlin et al., *Rev. Mod. Phys*. 73 (2001)
5) I. Rosenstein and J. T. Chen, *Phys. Rev. Lett*. 35, 303 (1975).
6) R. Monaco, M. Aaroe, J. Mygind, and V. P. Koshelets, *J. Appl. Phys*. 104, 023906 (2008).
7) S. L. Miller, K. R. Biagi, J. R. Clem, and D. K. Finnemore, *Phys. Rev. B* 31 2684 (1985).
8) Y. Mawatari, *J. Phys. D: Appl. Phys.* **55**, 200002 (2022).
9) A. Barone, G. Paterno, M. Russo, R. Vaglio, *physica status solidi* A 41, 393 (1977)
10) 圓福敬二, "Advanced Magnetic Sensing System Utilizing SQUID", *低温工学*, 第 **54** 巻, 3 号 (2019)
11) 栗野直行等, "ジョセフソン素子の医療への応用", *応用物理*, 第 **53** 巻, 第 6 号 (1984)
12) F. London, *Superfluids*. New York, NY: Wiley, 1950
13) 上田天馬, " 斜め磁場下のジョセフソン接合において形状が接合電流に与える影響 ", 九州工業大学大学院 2022 年度修士論文
14) R. Gross and A. Marx, Applied Superconductivity: Josephson Effect and Superconducting Electronic (2005)
15) M.Weihnacht, Influence of Film Thickness on D. C. Josephson Current, *Phys. Stat. Sol. (b)*, **32**, 2, K169 (1969).
16) A. Nakayama et al., *Microelectronic Engineering* 146 (2015)

謝辞

最初に，九州工業大学大学院情報工学研究院電子情報工学研究系エレクトロニクス分野の小田部荘司教授に深くお礼を申し上げます．国内・国際での学会への参加の機会だけでなく，学外の研究者の方との交流や論文投稿の機会も設けて下さり，大学院生としての活動の幅広い支援を賜りました．

また，国立研究開発法人産業技術総合研究所，電子光技術基礎研究部門の馬渡康徳先生にも深くお礼を申し上げます．国際学会で一度顔を合わせた以外はすべてオンラインでのやり取りでしたが，研修という形で受け入れて下さり，研究内容そのものについてだけでなく，学会発表や論文での表現などに関しても多くのご指導を頂きました．

また，大学生活，大学院生活の心の支えとなった先輩，後輩，同僚の方々，その中でも特に，同じ研究チームで活動した毛利誠一君に感謝の意を示します．

最後に，重ね重ねにはなりますが，支えて下さった方々に厚くお礼を申し上げます．

本研究は，JSPS 科研費 20K05314 の助成を受けて行われました．